Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Белорусский государственный университет
информатики и радиоэлектроники»

Институт информационных технологий

Кафедра физико-математических дисциплин

А. И. Митюхин

АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Рекомендовано УМО по образованию в области информатики и радиоэлектроники в качестве учебно-методического пособия для специальности 1-40 01 01 «Программное обеспечение информационных технологий»

Минск БГУИР 2023

УДК 004.421:621.391.8(075)
ББК [32.973.202+32.811]я73
М67

Рецензенты:

кафедра связи учреждения образования
«Военная академия Республики Беларусь»
(протокол №13 от 02.03.2022);

профессор кафедры естественнонаучных и общепрофессиональных дисциплин учреждения образования «Белорусская государственная академия авиации» кандидат технических наук, доцент А. Г. Капустин

Митюхин, А. И.

М67 Алгоритмы цифровой обработки сигналов : учеб.-метод. пособие / А. И. Митюхин. – Минск : БГУИР, 2023. – 138 с. : ил.
ISBN 978-985-543-702-5.

Рассмотрены понятия теории алгоритмов цифровой обработки сигналов, теории линейных систем, основных операций обработки сигналов для приложений, реализующих оптимальный прием сигналов. Дано описание алгоритмов, позволяющих уменьшать объем передаваемых, хранимых или распределяемых данных. Представлено математическое описание алгоритмов дискретного преобразования Фурье. Методы и алгоритмы теории обработки сигналов изложены с учетом их практической направленности. Учебный материал содержит примеры решения задач на основе использования доступного математического аппарата. Изложение тем сопровождается иллюстрациями, заданиями для самостоятельного выполнения, контрольными вопросами.

УДК 004.421:621.391.8(075)
ББК [32.973.202+32.811]я73

ISBN 978-985-543-702-5

© Митюхин А. И., 2023
© УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», 2023

Содержание

ВВЕДЕНИЕ 5
1. ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ 8
1.1. Способы отсчета значений сигнала во времени 8
1.2. Классификация сигналов 12
1.3. Модели представления сигналов 20
1.4. Теорема дискретизации 21
1.5. Связь параметров цифровых телевизионных изображений и пространственной дискретизации 23
1.6. Последовательность операций цифровой обработки сигналов 26
1.7. Обобщенная схема алгоритма цифровой обработки сигналов 27
1.8. Процессы обработки изображений 28
1.9. Задания для самостоятельного выполнения 33
2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ 34
2.1. Преобразование сигналов линейными системами 34
2.2. Линейные стационарные системы 36
2.3. Связь между входным и выходным сигналами в линейной системе 36
2.4. Операция свертки 39
2.5. Алгоритм построения апериодической свертки 41
2.6. Алгоритм построения периодической свертки 44
2.7. Операция корреляции 46
2.8. Линейные разностные уравнения с постоянными параметрами 49
2.9. Рекурсивные линейные дискретные системы 51
2.10. Нерекурсивные линейные дискретные системы 55
2.11. Задания для самостоятельного выполнения 58
3. АЛГОРИТМЫ ОПИСАНИЯ СИСТЕМ И СИГНАЛОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ 60
3.1. Ряды Фурье 60
3.2. Дискретная форма ряда Фурье 66
3.3. Алгоритм дискретного преобразования Фурье 72
3.4. Свойства алгоритма дискретного преобразования Фурье 77
3.5. Разрешение по частоте в дискретном спектральном анализе 84
3.6. Спектральный анализ фрагмента речевого сигнала 85
3.7. Синтез фрагмента речевого сигнала 89
3.8. Задания для самостоятельного выполнения 90
4. АЛГОРИТМ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ 92
4.1. Вычислительная сложность дискретного преобразования Фурье 92
4.2. Быстрое преобразование Фурье по основанию два 94
4.3. Факторизация матрицы ядра ДПФ 103
4.4. Задания для самостоятельного выполнения 105

5. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ДЕКОДИРОВАНИЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫХ КОДОВ 106
5.1. Основная теорема кодирования для канала с шумом (вторая теорема Шеннона) 106
5.2. Вектор ошибок 111
5.3. Алгоритм декодирования кода на основе принципа максимального правдоподобия 112
5.4. Задания для самостоятельного выполнения 116
6. ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ 117
6.1. Эффективное представление и описания границы, формы объекта интереса на изображении 117
6.2. Спектральный алгоритм кодирования сигналов 117
6.3. Алгоритм распознавания образов с помощью количественных признаков 125
6.4. Задания для самостоятельного выполнения и вопросы по разделу 136
Список использованных источников 137

ВВЕДЕНИЕ

Цифровая обработка сигналов (ЦОС) – это область науки и техники, в которой изучаются общие для разных дисциплин алгоритмы обработки сигналов и изображений на основе математических методов. Учебно-методическое пособие предназначено:

– для изучения как общих математических алгоритмов и методов ЦОС, так и для получения знаний для решения конкретных реальных задач, например, в приложениях, реализующих оптимальный прием и обработку сигналов;

– изучения свойств дискретных ортогональных преобразований и применения их для повышения эффективности обработки сигналов и изображений;

– получения знаний для проектирования современных информационных систем и сетей, в которых широко используются быстрые вычислительные алгоритмы, основанные на спектральных представлениях, а в качестве средств обработки используется цифровая вычислительная техника.

Цифровая обработка сигналов – это технология, реализующая огромный набор приложений, включая инфокоммуникацию, космические и военные системы, медицину, археологию, инфомедиа и многое другое. Применение разнообразных математических алгоритмов обработки сигналов, соответствующего аппаратного оборудования и программного обеспечения позволяет создавать современные автоматизированные промышленные системы нового индустриального этапа развития общества – «Industrie 4.0».

До 1960-х годов технология обработки сигналов и изображений была в основном непрерывной (аналоговой). Отличие ЦОС от классической аналоговой теории обработки сигналов состоит в том, что обрабатываемый сигнал в ЦОС – это числовая последовательность [1]. Обработка осуществляется с помощью операций над числами. В этом случае непрерывные сигналы преобразуются в последовательность отсчетов, т. е. дискретный сигнал. После дискретной обработки ее результат вновь конвертируется в непрерывный сигнал.

Для многих информационных систем предпочтительны операции обработки в режиме реального времени. В этом случае отсчеты реакции системы вычисляются с той же частотой, что и отсчеты дискретизации непрерывного сигнала. Дискретная обработка непрерывных сигналов и изображений в режиме реального времени – это типичная ситуация в системах связи, радиолокации, гидролокации, в автоматизированных системах обработки информации военного назначения. Надежность и эффективность таких систем во многом определяется применением быстрых вычислительных цифровых алгоритмов обработки исходных данных. Проигрыватель компакт-дисков (CD-плеер) – иной пример, где входной аналоговый обработанный сигнал хранится в цифровом виде на компакт-диске, а выходной сигнал выдается в реальном времени.

Широкое применение находит ЦОС в системах с оптимальной обработкой сигналов, где применяются алгоритмы эффективного и помехоустойчивого кодирования информации [2]. Например, при использовании низкоскоростного по-

мехоустойчивого кодирования операция длительного накопления энергии слабых сигналов сравнительно легко реализуется с помощью алгоритмов и методов ЦОС. Алгоритмы ЦОС позволяют уменьшить энергетические, временные и частотные затраты на передачу сигналов и изображений в сравнении с передачей аналоговых.

Большинство из традиционных систем обработки оперирует поданным на вход сигналом и получает другой выходной сигнал. Важный класс задач ЦОС касается их интерпретации. Цель таких задач состоит не в получении выходного сигнала, а в описании характеристик входного.

Преимущества и эффективность цифровой обработки сигналов в сравнении с аналоговой обработкой можно свести к следующим:

1. Стабильность характеристик.

В аналоговой аппаратуре применяют специальные меры для поддержания постоянства тех или иных технических характеристик системы. Требование стабильности характеристик должно учитывать влияние изменения атмосферного давления, температуры, химических примесей, ударов, вибраций, старения, изменения питающих напряжений, условий распространения радиоволн и многое другое. В этом случае для поддержания стабильности используют специальные материалы со стабильными свойствами и малыми коэффициентами линейного расширения, а также высокоточные пассивные радиоэлементы. Технология производства аналоговых устройств, как правило, использует специальные покрытия, поглотители влаги, амортизаторы, заливку специальными составами и пр. Например, для достижения заданной стабильности частоты генерирования задающих (тактовых) колебаний применяется:

– специальная схемотехника;

– термокомпенсация;

– термостабилизация.

2. Принципиально достижимая более высокая прогнозируемая и гарантированная точность обработки сигналов.

Возможность реализации сложных алгоритмов с заданной точностью обработки сигналов, которую трудно, а часто даже невозможно реализовать с помощью аналоговой техники.

3. Большой динамический диапазон обрабатываемых сигналов.

4. Возможность гибкой оперативной перестройки структуры и параметров устройств и систем.

Возможность реализации принципа «адаптации» или самонастройки, т. е. изменения алгоритма обработки сигналов без физической перестройки систмы, например, зависимости от вида сигнала, поступающего на вход фильтра. Отдельные блоки многоканальных систем, например, арифметико-логическое устройство (АЛУ), можно сделать общими для всех каналов. Сравнительно технически просто реализуется одновременная обработка сигналов от нескольких источников.

5. Высокая надежность, малые вес и габариты.

6. Технически просто обеспечивается ремонтопригодность и взаимозаменяемость отдельных устройств или систем.

7. Цифровые методы и алгоритмы эффективны для обработки низкочастотных сигналов.

Размеры пассивных элементов на низких частотах чрезмерно громоздки. Это приводит к увеличению массогабаритных характеристик измерительных приборов, работающих на низких частотах, например, медицинских, гидроакустических и др.

8. Цифровые методы особенно эффективны для систем с алгоритмами оптимальной обработки сигналов.

Например, для космических, военных, автоматизированных промышленных систем (роботов) и др.

9. Техническая реализация ЦОС сравнительно просто осуществляется на основе аппаратно-программных средств.

Аналоговые сигналы достаточно просто генерировать и обрабатывать, однако они позволяют решать относительно простые технические задачи с заданной точностью.

К *недостаткам цифровых методов обработки сигналов* можно отнести:

– большую техническую сложность реализации обработки по сравнению с аналоговыми методами и более высокую стоимость;

– не столь высокое, как хотелось бы, быстродействие;

– невозможность устранения специфических погрешностей, вызванных операциями дискретизации, квантования сигнала и округления в процессе вычислений.

Инженер-разработчик стоит перед выбором надлежащей комбинации аналоговых и цифровых методов и алгоритмов обработки сигналов. Невозможно обработать физические аналоговые сигналы, используя только цифровые методы и алгоритмы. Входные устройства – датчики (микрофоны, термопары, тензорезисторы, пьезоэлектрические и сенсорные элементы) являются аналоговыми устройствами. Выходные сигналы датчиков являются отражением некоторых физических процессов. Они, как правило, непрерывны, поскольку большинство физических процессов непрерывны по своей природе. Поэтому некоторые виды сигналов требуют наличия устройств нормализации для дальнейшей обработки сигналов аналоговым или цифровым методом. Нормализация сигнала осуществляется аналоговыми устройствами, которые выполняют:

– усиление сигналов в измерительных, предварительных усилителях;

– динамическое сжатие диапазона логарифмическими усилителями, логарифмическими ЦАП и усилителями с программируемым коэффициентом усиления);

– частотную фильтрацию (пассивную и активную) сигнала и пр.

1. ПЕРВИЧНАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

1.1. Способы отсчета значений сигнала во времени

Математические сигналы – это функции одной или более независимых переменных. Поскольку реальные физические процессы протекают во времени, то в качестве математической модели сигнала, представляющего эти процессы, используют функции времени, отражающие изменения физических процессов. Работа современных информационных систем основана на обработке дискретных и цифровых сигналов [3].

По способу отсчета значений сигнала во времени сигналы сигналы делятся:

– на непрерывные (аналоговые);
– дискретные;
– цифровые.

1.1.1. Непрерывные сигналы

Непрерывный сигнал описывается непрерывной функцией $x(t)$, задается на непрерывных промежутках и обычно называется аналоговым. Аналоговый сигнал может быть действительным или комплексным. Интервал изменения переменной времени может быть конечным или бесконечным. Для непрерывного (континуального) сигнала это несчетное множество, например, [0, t) или [0, ∞). На рис. 1.1 показан фрагмент речевого сигнала $x(t)$. Рисунок иллюстрирует квазипериодическое колебание с изменяющейся основной частотой в сравнительно широком диапазоне.

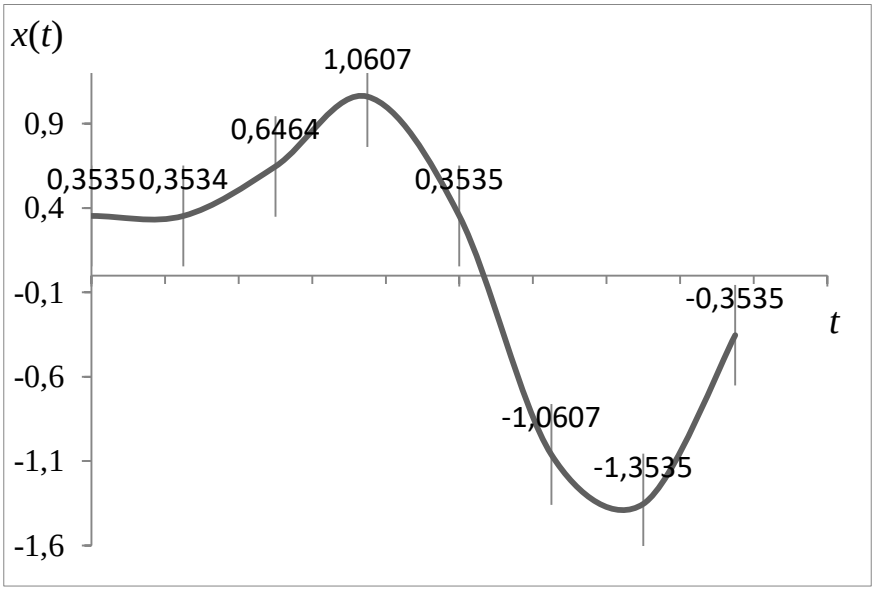


Рис. 1.1. Фрагмент речевого сигнала

1.1.2. Дискретные сигналы

Дискретный сигнал – это сигнал дискретный во времени и непрерывный по состоянию. Дискретный фрагмент речевого сигнала в виде дискретной функции (решетчатой функции) для дискретной переменной nT_d изображен на рис. 1.2.

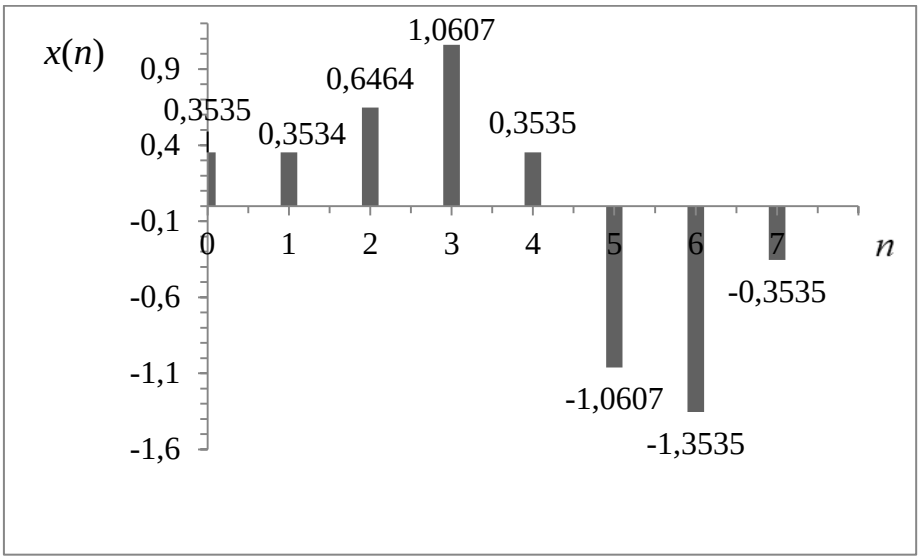


Рис. 1.2. Фрагмент дискретного речевого сигнала

Переход от аналогового представления функции к дискретному виду символически отображается выражением

$$x(t) \to x_d(nT_d), n \forall \mathbb{Z}.$$

Величина $x_d(nT_d)$ соответствует отсчету сигнала в точке n, указывающей порядковый номер отсчета. Интервал T_d называется периодом дискретизации, а обратная величина $f_d = \frac{1}{T_d}$ – частотой дискретизации. Дискретный сигнал описывается счетным множеством чисел, включающем N точек на интервале $[0, N-1]$. Период дискретного сигнала определяется как

$$T = nT_d, N > n \geq 0. \qquad (1.1)$$

После дискретизации $x(t)$ получена дискретная вещественная последовательность (см. рис. 1.2)

$$x_d(nT_d) = (x_d(0), x_d(1), \ldots, x_d(N-1)) = (0{,}35;\ 0{,}35;\ 0{,}64;\ 1{,}06;\ 0{,}35;\ -1{,}06;\ -1{,}35;\ -0{,}35).$$

Дискретный сигнал может быть действительным или комплексным. Его характеристиками являются энергия

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} \left| x_d(nT_d) \right|^2 \qquad (1.2)$$

и мощность

$$P = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \left| x_d(nT_d) \right|^2. \qquad (1.3)$$

Выражения (1.2) и (1.3) могут интерпретироваться как энергия и мощность ступенчатых огибающих дискретных сигналов (их континуальных аналогов).

Дискретные сигналы ортогональны, если их взаимная энергия удовлетворяет условию

$$E_{12} = \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) x_2^*(n) = 0, \qquad (1.4)$$

где знак * обозначает комплексное сопряжение.

Энергия и мощность ортогональных сигналов аддитивны, т. к.

$$E = \sum_{n=0}^{N-1} |x_1(n) + x_2(n)|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} |x_1(n)|^2 + \sum_{n=0}^{N-1} |x_2(n)|^2.$$

1.1.3. Цифровые сигналы

Цифровая обработка сигналов требует, чтобы дискретные сигналы были квантованы по величине. В этом случае амплитуды сигнала описываются только фиксированными целочисленными значениями, а сигнал называется цифровым. Цифровой сигнал дискретен как во времени, так и по состоянию. Цифровой сигнал $x(n)$ также описывается решетчатой функцией $x_d(nT_d)$, которая принимает конечное число значений на некотором целочисленном интервале $x'_d \le x_d \le x''_d$. Эти значения называются уровнями квантования, а соответствующая функция – квантованным сигналом. Квантование производится с целью получения конечной последовательности целых чисел. При попадании дискретного отсчета сигнала в пределы того или иного шага квантования производится его округление до уровня квантования, соответствующего этому шагу (рис. 1.3). Цифровой сигнал $x(n)$ отличается от дискретного $x_d(nT_d)$ на величину

$$\zeta_Q(nT_d) = x_d(nT) - x(n),$$

где $\zeta_Q(nT)$ – ошибка квантования или искажение, возникающее за счет квантования.

Максимальная ошибка квантования при использовании округления равна половине шага квантования:

$$\mathrm{Max}\left|\xi_q\right| = -\mathrm{Max}\left|\xi_q\right| = \frac{\delta}{2}.$$

Рис. 1.3. Квантованный сигнал

Легко убедиться, что результатом дискретизации и квантования (см. рис. 1.3) является дискретный сигнал $x_d(n)$, после квантования получается цифровой сигнал $x(n)$. Ему соответствует последовательность десятичных символов вида

$$x(n) = (x(0), x(1), \ \ldots\ , x(N-1)) = (3,6,7,6,3,1,0,1,3). \qquad (1.5)$$

При использовании первичного кодирования непрерывных сигналов, например, с применением АЦП, на его выходе формируется цифровая последовательность двоичных символов (чипов), соответствующая значениям дискреного сигнала (1.5):

$$x(n) = (011110111110011001000001011).$$

При изучении дискретных, цифровых систем удобно пользоваться нормированным временем

$$\hat{t} = \frac{t}{T_d} = \frac{nT_d}{T_d} = n.$$

Нормированное время $\hat{t}$ есть номер n отсчета дискретного и цифрового сигналов.

Замечание 1.1. Для описания дискретного и цифрового сигналов могут быть использованы равнозначные обозначения $x(nT)$ и $x(n)$.

С увеличением уровней квантования повышается амплитудное разрешение сигнала и точность его воспроизведения (табл. 1.1).

Таблица 1.1

Зависимость динамического диапазона от разрядности квантования

Разрядность квантования (бит)	Уровень качества	Число уровней квантования U_1	Динамический диапазон $20\log_{10}\frac{U_1}{\delta}$, дБ
8	Телефония	256	48
16	*CD*	65 536	96
24	*DVD*	16 777 216	144
32	*HDA* (*High Definition*)	4 294 967 296	192

1.2. Классификация сигналов

По роли в передаче информации сигналы могут быть разделены на полезные и мешающие (помехи). Полезные сигналы переносят заданную информацию, а помехи искажают ее.

1.2.1. Помехи в радиосистемах передачи информации

В любой точке электронной системы имеются электрические шумы в виде нежелательной энергии в смеси полезного сигнала и шума.

Тепловой шум. Вследствие естественных тепловых воздействий и возбуждения атомов, например, медного проводника, возникают свободные электроны. Хаотическое распространение в различных направлениях этих электронов приводит к появлению стохастической разности электрических потенциалов на концах проводника, резистора и пр. Появляющийся в результате тепловой шум характеризуется энергией, величина которой возрастает с увеличением температуры. Среднее значение напряжения шума равно нулю. Изменение во времени напряжения шума подчиняется гауссовскому распределению вероятностей появления его значений. Знак напряжения непрерывно случайно изменяется. Тепловой шум описывается равномерным спектром в широком диапазоне частот от 0 до 10 000 ГГц. Если концы проводника с величиной сопротивления R замкнуть, то рассеиваемая на проводнике мощность P_n^d и напряжение шума e_n определяются следующими выражениями:

$$P_n^d = \frac{e^2_n}{R} = 4kTB,$$

$$e_n = \sqrt{4kTBR}\,,$$

где k – постоянная Больцмана ($k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К);

T – температура в кельвинах (определяется как $T = t + T_0$, где t – температура в градусах Цельсия, T_0 – нулевая точка по шкале Цельсия (точка затвердевания воды), равная 273,15К);

B – ширина полосы частот, например, приемника.

В реальной электронной схеме имеется нагрузка, в которую поступают шумы. Для передачи максимальной энергии источника сигнала с выходом R в нагрузку с сопротивлением R_L должно выполнятся согласование сопротивлений вида $R = R_L$. Имеем схему с последовательным соединением сопротивлений R и R_L и источника наприжения e_n. Ток в цепи (среднее значение в некотором интервале наблюдения) равен

$$\overline{i}_n = \frac{\overline{e}_n}{R + R_L}\,.$$

Эквивалентная шумовая мощность, рассеиваемая на нагрузке, равна

$$P_n = \overline{i}_n^{\,2} R_L = \frac{\overline{e}_n^{\,2} R_L}{(R + R_L)^2} = \frac{\overline{e}_n^{\,2} R_L}{4R_L^2} = \frac{\overline{e}_n^{\,2}}{4R_L}\,.$$

Подставляя в последнее выражение значение напряжения шума, получаем

$$P_n = \frac{\overline{e}_n^{\,2}}{4R_L} = \frac{4kTBR_L}{4R_L} = kTB.$$

Для описания шума используется понятие спектральной плотности мощности шума N_0. Величина N_0 (Вт/Гц) определяет нормированное значение спектральной плотности мощности шума. Мощность теплового шума в полосе частот при одностороннем представлении спектра шума определяется как

$$P_{N_0} = BN_0\,.$$

Замечание 1.2. В научной литературе тепловой шум называют аддитивным гауссовским белым шумом по аналогии с белым светом, спектр которого содержит все составляющие видимых цветов. Среднеквадратичное значение напряжения от нескольких источников шума отвечает свойству аддитивности.

Замечание 1.3. Реальные радиоэлектронные системы передачи информации работают в ограниченной полосе частот. В этом случае спектр шума на выходе любого частотного фильтра выражается произведением спектра входного шумового процесса и частотной характеристикой фильтра. Мощность шума на выходе фильтра будет зависить от формы и ширины полосы частот фильтра. В этом случае величина полосы частот B называется эквивалентной полосой частот шума.

Помехи в системах передачи информации. В радиочастотном диапазоне различают помехи *естественного происхождения*:

1. Атмосферные шумы, например, электростатический разряд как следствие молнии. Полоса частот этих помех в пределах 20 МГц. К виду атмосферных относятся квантовые шумы, возникающие на уровне атомных и молекулярных эффектов атмосферы. Их присутствие заметно на частотах свыше 10 ГГц.

2. Тепловые шумы Земли (геошумы) на частотах свыше 200 МГц.

3. Космические помехи, например, солнечный шум. Полоса частот этих помех от 10 МГц до 10 ГГц. Звездное пространство Вселенной излучает помехи на частотах до 1 ГГц. Свыше частоты 4 ГГц уровень шумов звездной Вселенной существенно снижается.

К помехам *искусственного происхождения* относятся различные виды промышленных шумов, возникающие в моменты включения или выключения мощных электрических установок, станков и пр. Полоса частот этих помех в пределах 200 мГц.

Качество системы передачи информации характеризуется вероятностью ошибки на бит (частотой ошибок на бит). При передаче сигналов по каналу с аддитивным гауссовским шумом вероятность ошибки на бит может быть уменьшена путем увеличения мощности передатчика, которая также является одной из характеристик качества системы. Лучшей из двух систем передачи данных считается та, которая достигает желаемой частоты ошибок на бит при меньшей мощности передатчика. Для оценки качества системы удобно использовать отношение $\frac{P_s}{P_{N_0}}$ мощности сигнала P_s к мощности шума P_{N_0} на выходе радиоэлектронной системы. В логарифмической форме отношение $\frac{P_s}{P_{N_0}}$ выражают в децибелах:

$$\frac{P_s}{P_{N_0}}[\text{дБ}] = 10\log_{10}\frac{P_s}{P_{N_0}}.$$

Некоторые приемлемые значения отношения сигнал/шум:

– радиовещание – 60 дБ;

– телефония – 30 дБ;

–цифровое телевизионное вещания с хорошим качеством – стандартные значения отношения составляют 60–70 дБ. В этом случае отношение $\frac{P_s}{P_{N_0}}$ превышает величину 10^6.

По степени определенности ожидаемых значений все сигналы можно разделить на случайные и детерминированные.

1.2.2. Случайные, детерминированные и испытательные сигналы

Случайным сигналом называют функцию времени, значения которой могут быть предсказаны лишь с некоторой вероятностью. В качестве основных характеристик случайных сигналов принимают:

а) закон распределения вероятности (вероятности значений случайного сигнала в определенном временном интервале);

б) спектральное распределение мощности сигнала.

Детерминированным называется сигнал, значение которого в любой момент времени может быть точно определено.

В практике ЦОС находят применение периодические и апериодические сигналы.

Периодическим называется сигнал, для которого выполняется условие

$$x(t) = x(t + lT), -\infty < t < \infty, \tag{1.6}$$

где l – любое целое число;

T – период, являющийся конечным отрезком времени.

Испытательные сигналы. Среди детерминированных сигналов особое место занимают испытательные сигналы. Необходимость существования испытательных сигналов обусловлена потребностями анализа и оценки характеристик разрабатываемых электронных приборов, устройств, систем и пр. Самым распространенным испытательным сигналом является гармоническое колебание, которое используется для оценки частотных свойств устройств (фильтров) различного назначения.

Гармоническое колебание

Определение 1.1. Гармоники функции периода T_0 – это периодические функции синуса или косинуса со значениями частот, представляющими целые кратные основной частоты $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0$:

$$x(t) = x_m \sin(\omega_0 t) = x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t\right) = x_m \sin\left(2\pi f_0 t\right), \tag{1.7}$$

где x_m – амплитуда колебания (модуль наибольшего его отклонения от нуля);

ω_0 – основная круговая частота, рад/с $\left(\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}\right)$;

T_0 – период колебания;

f_0 – линейная частота, Гц, с^{-1} $\left(f_0 = \dfrac{1}{T_0} = \dfrac{\omega}{2\pi}\right)$.

Гармоническое колебание (1.7), представленное в декартовой системе координат, показано на рис. 1.4, *а*. Ниже (рис 1.4, *б*) изображено колебание (1.7), но с начальным фазовым сдвигом φ_0:

$$x(t) = x_m \sin(\omega_0 t - \varphi_0) = x_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0} t - \varphi_0\right) = x_m \sin\left(2\pi f_0 t - \varphi_0\right), \qquad (1.8)$$

где φ_0 – начальная фаза колебания, рад $\left(\varphi_0 = \dfrac{\Delta T}{T_0} 2\pi, \text{где} - \Delta T \text{ сдвиг колебания}\right.$ по времени).

Гармоническое колебание можно изобразить в виде вектора в полярной системе координат (рис. 1.4, *в*).

Под *k*-й гармоникой периодического колебания понимают гармоническое колебание с частотой, в *k* раз превышающей основную частоту ω_0. Например, вторая гармоника записывается как

$$x(t) = x_m \sin(2\omega_0 t - \varphi_0) = x_m \sin\left(\frac{2 \cdot 2\pi}{T_0} t - \varphi_0\right) = x_m \sin\left(2 \cdot 2\pi f_0 t - \varphi_0\right).$$

Наблюдается процесс, когда за каждый основной период T_0 формируются два синусоидальных колебания.

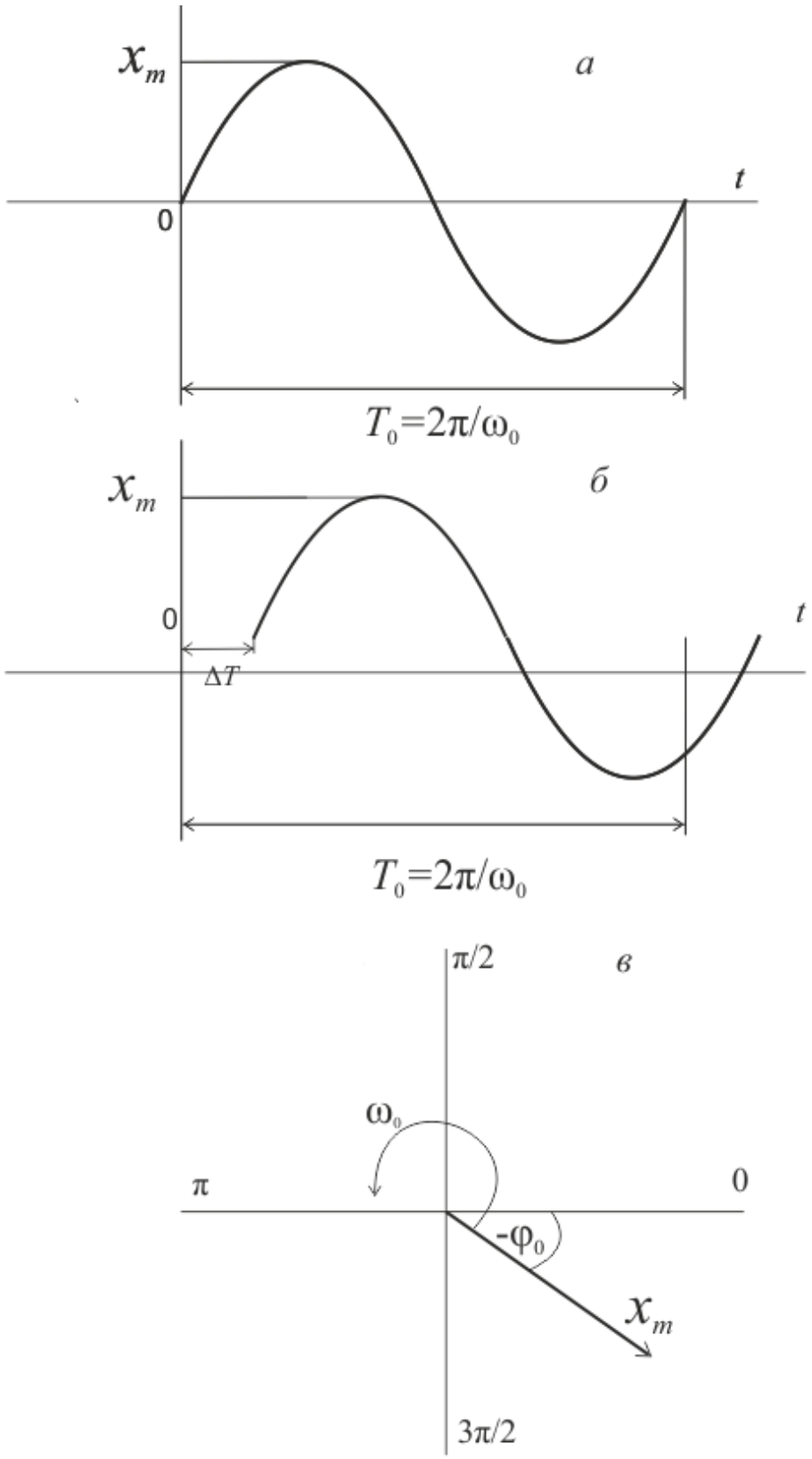


Рис. 1.4. Представления гармонического сигнала

Наряду с использованием синусоидальной функции для представления (описания) сигналов и систем широко применяется *комплексная экспоненциальная функция*, которая определяется формулой Эйлера (Леонард Эйлер – швейцарский математик и физик (1707–1783)):

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t, \tag{1.9}$$

где $j = \sqrt[2]{-1}, \omega t \in \mathbb{R}$.

Формула отражает связь между действительными тригонометрическими функциями и комплексной экспоненциальной функцией $e^{j\omega t}$.

Данная система функций составляет счетное бесконечное множество и определена на бесконечном интервале частот. Вещественная и мнимая часть последовательности (1.9) меняются косинусоидально/синусоидально в зависимости от ω и t. По аналогии с непрерывным временем параметр ω называется круговой частотой непрерывной комплексной экспоненты.

Цифровой единичный импульс. Многие алгоритмы ЦОС основаны на применении понятия цифрового единичного импульса.

Определение 1.2. Цифровой единичный импульс (отсчет) определяется выражением

$$u_0(n) = \begin{cases} 1, n = 0, \\ 0, n \neq 0, \end{cases} \tag{1.10}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Графическая иллюстрация единичного импульса показана на рис. 1.5, *а*.

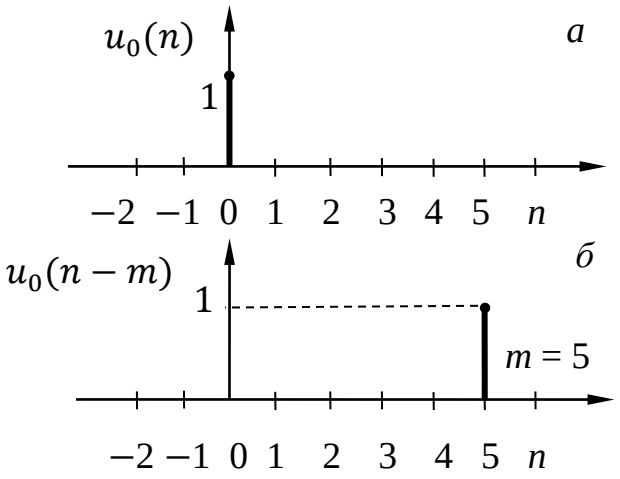


Рис. 1.5. Цифровой единичный импульс

На рис. 1.5, *б* изображен единичный импульс $u_0(n-m)$, задержанный на m интервалов дискретизации:

$$u_0(n-m) = \begin{cases} 1, n = m, \\ 0, n \neq m, \end{cases} \tag{1.11}$$

где $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

В цифровых системах этот импульс играет такую же роль, как и дельта-функция $\delta(t)$ Дирака при описании аналоговых систем (Поль Адриен Морис Дирак – английский физик (1902–1984)). По определению δ-функция (рис. 1.6) удовлетворяет следующим условиям:

$$\delta(t-t_0)=\begin{cases}\infty, t=t_0,\\ 0, t\neq t_0,\end{cases}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-t_0)dt=1.$$

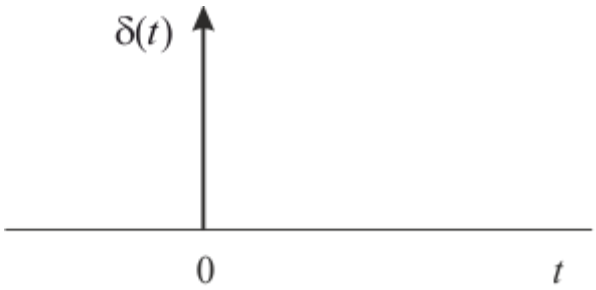


Рис. 1.6. Символическое изображение дельта-функции

Дельта-функция равна нулю при всех отличных от нуля значениях аргумента и принимает в точке $t = 0$ бесконечно большое значение. Площадь под кривой, ограниченной δ-функцией, равна единице. Различие между цифровым единичным импульсом и δ-функцией состоит в том, что цифровой единичный импульс является физически реализуемым сигналом, тогда как аналоговый единичный импульс $\delta(t)$ рассматривается только как обобщенная функция.

Пусть задана произвольная дискретная последовательность $x(n)$. Такая числовая последовательность может быть представлена как сумма взвешенных и задержанных цифровых единичных импульсов.

Определение 1.3. Дискретная последовательность $x(n)$ представляется суммой взвешенных и задержанных единичных импульсов по формуле

$$x(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)u_0(n-m). \qquad (1.12)$$

Пример 1.1. Задана следующая дискретная последовательность (см. рис. 1.2):

$$x(n)=(x(0),x(1),\ldots,x(7))=(0{,}35;\ 0{,}35;\ 0{,}64;\ 1{,}06;\ 0{,}35;-1{,}06;\ -1{,}35;-0{,}35).$$

Записать выражение для определения отсчета с номером $n = 6$.

Решение.

$$x(6)=\sum_{m=0}^{7}x(m)u_0(6-m)=x(0)u_0(6-0)+x(1)u_0(6-1)+\ldots+$$
$$+x(6)u_0(6-6)+x(7)u_0(6-7)=x(6)u_0(0)=x(6)=-1{,}35.$$

1.3. Модели представления сигналов

Основными обобщенными приложениями использования алгоритмов и методов ЦОС является цифровая фильтрация и спектральный анализ. Для этих направлений ЦОС наибольший интерес представляют две модели представления: временная $x \Rightarrow x(t)$ и частотная (спектральная) $x \Rightarrow X(\omega)$.

Модели сигналов в виде функции времени предназначены в первую очередь для анализа формы сигналов. Однако при решении задач прохождения сигналов сложной формы через какие-либо фильтры временная модель в ряде приложений не позволяет понять суть происходящих физических процессов фильтрации.

В 1807 году Жан Батист Жозеф Фурье (французский математик (1768–1830)) высказал идею о том, что любая сложная периодическая функция $x(t) = x(t + lT)$ может быть представлена суммой синусоидальных и/или косинусоидальных функций с частотами, кратными основной частоте, умноженных на некоторые коэффициенты.

Частотная модель описывает сигнал набором элементарных (базисных) функций, в качестве которых используются ортогональные функции. На базе частотной модели выполняется спектральный (гармонический) анализ сигналов.

Гармонический анализ – это раздел ЦОС и математики, который изучает представления функций (сигналов) в виде тригонометрических рядов Фурье и преобразований Фурье. Основным понятием в спектральном анализе является гармоническая функция. Выбор именно таких функций обусловлен тем, что они являются с математической точки зрения собственными функциями инвариантных во времени линейных систем (систем, параметры которых не зависят от времени). Гармонические функции не изменяют своей формы после прохождения через линейные системы. Могут изменяться только амплитудные и фазовые параметры гармоник. Сигнал может быть представлен множеством гармонических функций, каждая их которых характеризуется своими параметрами амплитуды, фазы и частоты.

Таким образом, спектральный анализ описывает исходный сигнал (процесс) посредством иного аргумента – частоты. На рис. 1.7 показан дискретный амплитудный спектр речевого сигнала (см. рис. 1.2). Говорят, спектр как функция $X(k)$ – это образ сигнала при описании его в частотной области. Аргумент k обозначает номер частотной составляющей спектра 1D-сигнала.

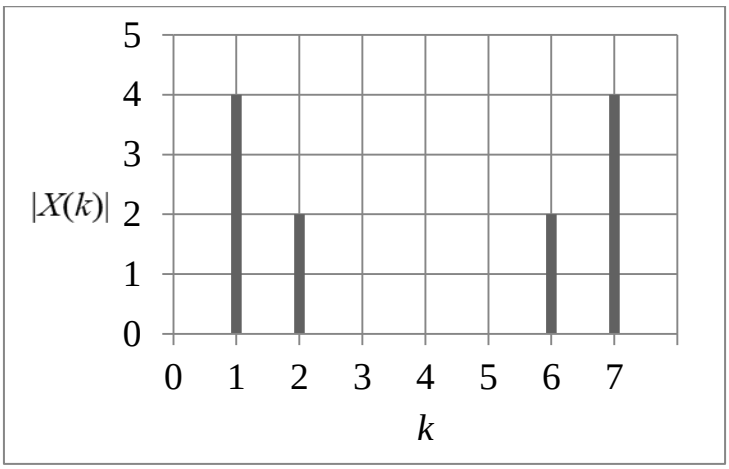


Рис. 1.7. Амплитудный дискретный спектр сигнала

1.4. Теорема дискретизации

Дискретизация представляет собой процедуру взятия мгновенных значений непрерывного сигнала $x(t)$ [4].

Положение 1. Задан сигнал, энергия которого полностью содержится внутри полосы частот от 0 до W Гц; сигнал дискретизируется с интервалами T_d секунд.

Теорема 1.1. Исходный сигнал может быть полностью восстановлен при частоте дискретизации

$$f_d = \frac{1}{T_d} \geq 2W . \qquad (1.13)$$

Замечание 1.4. Частота, равная половине частоты дискретизации, называется частотой Найквиста (Гарри Найквист – шведско-американский ученый, инженер (1889–1976)).

В западной научной литературе принято считать, что принцип дискретизации был высказан Найквистом в 1928 году. По советским источникам принцип дискретизации сформулировал и доказал советский ученый, академик В. А. Котельников (1908–2005) в 1933 году. Строгое определение теоремы дано в 1948 году К. Шенноном (Клод Шеннон – американский инженер, математик (1916–2001)).

Положение 2. Задан сигнал (приближенно) с частотным спектром, ограниченным частотой W Гц и существующий t секунд.

Теорема 1.2. Сигнал может быть полностью восстановлен (описан)

$$N = 2Wt$$

отсчетами сигнала.

Определение сигнала как приближенное введено для математической корректности. По самой природе преобразования Фурье никакая функция не может быть ограничена по частоте. Существует концептуальная трудность строгого частотного ограничения реального сигнала частотой W. В силу конечной длительности сигнала (рис. 1.8) он имеет бесконечно широкий спектр. В моменты возникновения и окончания сигнала временные интервалы Δt его формирования очень малы и, следовательно, ΔW очень велико, $W \to \infty$.

Рис. 1.8. Сигнал

Фактически бесконечность спектра является препятствием для преобразования сигнала $x(t)$ в цифровую форму $x(n)$, т. е. дискретизация невозможна. Тем не менее в спектре любого конечного сигнала есть такие высшие частотные составляющие, значения которых имеют незначительные амплитуды, и потому ими можно пренебречь без заметного искажения самого сигнала. Ограничение спектра до частоты Найквиста $W = \frac{f_d}{2}$ осуществляется антиэлайсинговым фильтром. Например, для телефонного сигнала полосой $W = 3{,}4$ кГц минимальная стандартная частота его дискретизации f_d = 8 кГц. Временной интервал дискретизации равен $T_d = \frac{1}{8 \cdot 10^3} = 125$ мкс.

Восстановление сигнала. Теоретически точное восстановление сигнала после дискретизации может быть выполнено с помощью идеального ФНЧ с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой и частотой среза $f_s = \frac{f_d}{2}$. Практически это исключено, т. к. для создания фильтра потребуется затратить бесконечное время.

По теореме дискретизации максимальная частота аналогового сигнала не должна превышать половины частоты дискретизации f_d, следовательно, в частотной области все дискретные сигналы целесообразно рассматривать в диапазоне $[0, \frac{f_d}{2}]$ или $[0, \frac{\omega_d}{2}]$.

1.5. Связь параметров цифровых телевизионных изображений и пространственной дискретизации

Рассмотрим получение некоторых значений параметров стандартов телевидения высокой четкости ТВЧ (*High Definition Television* (*HDTV*)), в том числе дискретизации. Дискретизация изображений принципиально не отличается от процедуры взятия мгновенных значений непрерывного сигнала. Цифровое изображение (2*D*-сигнал) представляется в виде функции $g(x_n, y_n)$ пространственных кординат x, y. Функция изменяется во времени t.

В соответствии с Рекомендацией МСЭ-*R BT*.709-6 Международного союза электросвязи (МСЭ) (*International Telecommunication Union* (*ITU*), *Recommendation ITU-R BT*.709-6) 2*D*-сигнал формируется путем его преобразования в 1*D*-сигнал. Для этого применяется развертка плоскости изображения по горизонтали (строкам) со смещением луча по вертикали для получения кадров.

Далее рассматриваются параметры цифровой системы телевидения $25/p$ с разрешением (форматом) *Full HD* $1080p$. Ширина полосы частот W аналогового сигнала изображения составляет 30 МГц. К основным системным параметрам относятся следующие:

– частота кадров f_p =25 Гц;

– кадр изображения получается методом прогрессивной (построчной) (p) развертки;

– формат кадра (*Aspect ratio*) $A = 16{:}9$;

– разрешение по строкам $l = 1125$;

– ортогональная структура дискретизации аналогового сигнала;

– частота строк $f_h = l \cdot f_p = 1125 \cdot 25 = 28\,125$ Гц.

Согласно рекомендации МСЭ система цифрового покомпонентного телевидения базируется на формировании пространственного совмещения одновременно существующих отсчетов – сигнала яркости Y и двух цветоразностных сигналов: красного $C_R = R - Y$ и синего $C_B = B - Y$.

Ортогональная структура дискретизации сигнала изображена на рис. 1.9.

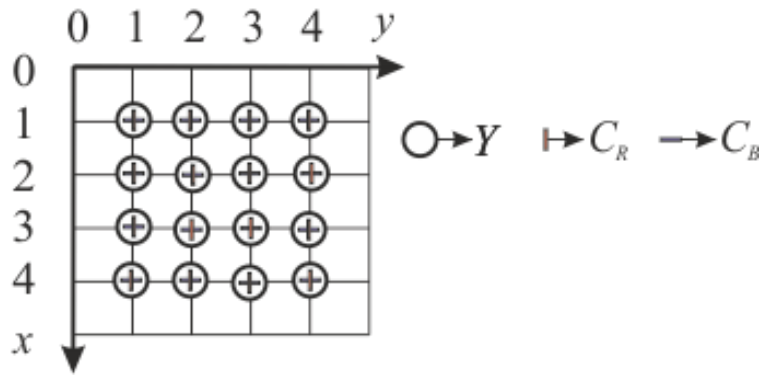


Рис. 1.9. Структура дискретизации изображения по стандарту 4:4:4

На практике используются разные семейства стандартов дискретизации. Рассмотрим два из существующих.

Стандарт 4:4:4 (см. рис. 1.9) отражает соотношение частоты f_{d_Y} дискретизации сигнала яркости Y и частот f_{d_R}, f_{d_B} дискретизации цветоразностных сигналов, а также одновременность их передачи. Цветоразностные сигналы C_R и C_B передаются в каждой строке и дискретизируются с той же частотой, что и яркостный сигнал, т. е.

$$f_{d_Y} = f_{d_R} = f_{d_B}.$$

Замечание 1.5. Студийный компонентный цифровой сигнал изображения, как правило, соответствует стандарту 4:4:4. Цветовая четкость изображения максимальна и одинакова как по горизонтали, так и по вертикали.

Стандарт 4:2:2. Частота дискретизации яркостного сигнала и частоты дискретизации цветоразностных сигналов связаны соотношением

$$f_{d_Y} = 2f_{d_R} = 2f_{d_B}.$$

В этом случае отсчеты сигналов C_R и C_B пространственно совмещены с нечетными отсчетами (1-й, 3-й, 5-й и т. д.) сигнала Y в каждой строке, как показано на рис. 1.10.

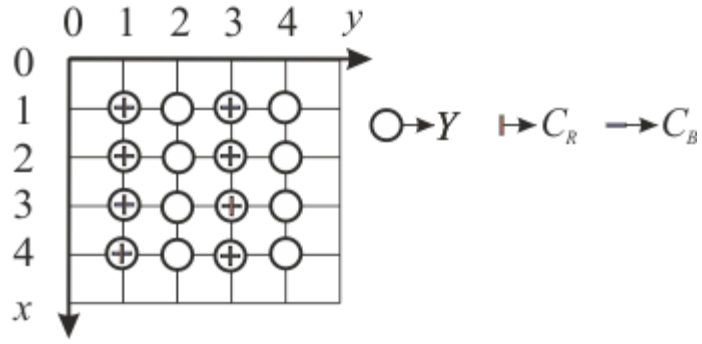


Рис. 1.10. Структура дискретизации по стандарту 4:2:2

Как видно из рис. 1.10, на четыре отсчета сигнала яркости приходится по два отсчета сигнала цветности в четных и нечетных строках. Отсчеты сигнала цветности пространственно и во времени совпадают с нечетными отсчетами сигнала яркости. В этом стандарте цветовая четкость по горизонтали в два раза меньше, чем яркостная.

Каждый цифровой отсчет, получаемый на выходе АЦП, представляется двоичным кодом длиной $n = 8$ или $n = 10$ чипов. Следовательно, диапазон двоичных значений составляет от 0000 0000 до 1111 1111 или от 0000 0000 00 до 1111 1111 11. Таким образом, используется равномерное квантование аналогового сигнала на 256 или 1024 уровня.

Ортогональная структура дискретизации (см. рис. 1.9) требует, чтобы на длине полной строки укладывалось целое число отсчетов (пикселей) N_y сигнала изображения. Для формата кадра 16:9 число отсчетов в строке равно

$$N_{16:9} = f_h \cdot A = 1125\frac{16}{9} = 2000.$$

С учетом теоремы дискретизации (см. подразд. 1.4) и ортогональности структуры дискретизации величина частоты f_d дискретизации должна быть наименьшим целым, кратным частоте f_h строк. Запишем выражение величины отношения этих частот:

$$N_{y_l} = \frac{f_d}{f_h} = \frac{f_d}{28\,125}. \qquad (1.14)$$

Наименьшее целое число $N_{y_l} > N_{16:9} = 2000$, удовлетворяющее (1.14), равно значению

$$N_{y_l} = 2640 = \frac{74\,250\,000}{28\,125}. \qquad (1.15)$$

Из (1.15) следует необходимое значение частоты дискретизации $f_d =$ $= 74{,}25$ МГц

Замечание 1.6. Реальный телевизионный сигнал содержит, кроме информации непосредстенно об изображении, еще и управляющую информацию – синхросигналы строк и полей кадра, гашения и другие сигналы. В этом случае количество активных отсчетов, несущих собственно изображение в виде сигнала яркости, будет меньше числа N_{y_l} отсчетов сигнала за период t одной полной строки.

Согласно рекомендации МСЭ для стандарта 4:2:2 на активной части цифровой строки должно умещаться $N_h = 1920$ отсчетов. В этом случае формату кадра 16:9 соответствует следующее число активных строк сигнала яркости:

$$N = 1920\frac{9}{16} = 1080.$$

Число 1080 строк соответствует вертикальному разрешению *Full HD* 1080p.

Из рис. 1.10 следует, что число активных отсчетов сигнала цветности за период t полной одной строки равно

$$N_R = N_B = 1080\frac{16}{9 \cdot 2} = 960.$$

Тактовая частота следования отсчетов сигнала изображения определяется из выражения

$$f = N_{y_l} f_h = 2640 \cdot 28\,125 = 74{,}250 \text{ МГц}.$$

Как видно, потоковая скорость цифровых отсчетов равна частоте дискретизации.

Пример 1.2. Определить ширину полосы частот цифрового полного телевизионного сигнала для системы телевидения 25/p стандарта 4:2:2 при 10-битовом квантовании (кодовое слово имеет длину $n = 10$).

Решение. Ширина полосы частот

$$W_{4:2:2} = f_{d_Y} n + f_{d_R} n + f_{d_B} n = 74{,}25 \cdot 10 + 2(37{,}125 \cdot 10) = 1{,}485 \text{ ГГц}.$$

Потоковая скорость передачи двоичных чипов достигает значения $R_{4:2:2} = 1{,}485$ Гбит/с. За одну секунду передается объем двоичных данных величиной 1,485 Гбит.

Стандартный телевизионный канальный частотный ресурс находится в диапазоне 48–862 МГц. Очевидно, без эффективного сжатия, применения специальных методов кодирования и сложных видов модуляции реализовать технологию многоканальной цифровой передачи изображений в формате *HDTV* невозможно. Кодирование основано на удалении не воспринимаемых органами зрения отдельных спектральных составляющих видеосигнала.

Замечание 1.7. В рамках МСЭ стандарты 4:4:4 и 4:2:2 разработаны экспертной группой по вопросам движущихся изображений (*Motion Picture Experts Group* (*MPEG*)). *MPEG*-1, *MPEG*-2, *MPEG*-4 – это стандарты кодирования мультимедиа, *H*.264, *H*.265 – стандарты видеокодирования.

1.6. Последовательность операций цифровой обработки сигналов

Цифровая обработка сигналов связана с представлением сигнала в виде последовательности чисел. Это означает, что исходный аналоговый сигнал $x(t)$ преобразуется в исходную последовательность чисел $x(n)$, которая процессором (вычислителем) по заданному алгоритму преобразуется в другую последовательность чисел $X(k)$, однозначно соответствующую исходной. Далее из полученной новой последовательности формируется результирующий сигнал $\tilde{x}(t)$ или оценка исходного. Обобщенная последовательность операций ЦОС показана на рис. 1.11. В зависимости от решаемой задачи ЦОС процессор выполняет операции заданного алгоритма. Например, вычисление корреляционной функции с использованием спектральных ортогональных преобразований для решения задачи посадки космического аппарата на объект (планету, астероид) дальнего космоса и пр.

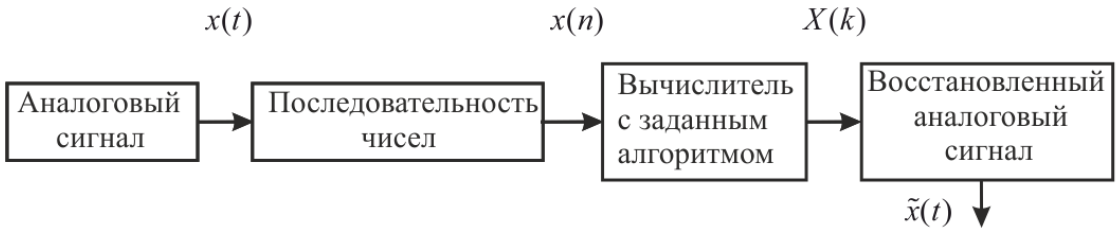


Рис. 1.11. Последовательность операций ЦОС

Во многих приложениях после процесса обработки требуется восстановить исходные данные, например, после эффективного кодирования (сжатия) речевого сигнала, изображения и пр. При этом величина ошибки восстановления ε определяется на основе задаваемых технических требований к информационной системе. Если $\tilde{x}(n)$ представляет собой дискретную оценку исходного дискретного сигнала $x(n)$, то среднеквадратичная ошибка (СКО) ε, определяемая как

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}(x(n)-\tilde{x}(n))^2}, \qquad (1.16)$$

характеризует степень искажения (достоверности) передаваемой, хранимой, перераспределяемой, анализируемой информации. Аналогичные соображения справедливы для 2*D*- и 3*D*-процессов (изображений). Изображение – это функции яркости $g(y_m, x_n)$ от двух пространственных переменных (рис. 1.12).

Рис. 1.12. Изображение как функция пространственных переменных

1.7. Обобщенная схема алгоритма цифровой обработки сигналов

В зависимости от назначения инфосистемы последовательность операций ЦОС соответствует определенной схеме обработки данных.

Основные составляющие схемы ЦОС, характерные для современных систем, показаны на обобщенной схеме (рис. 1.13).

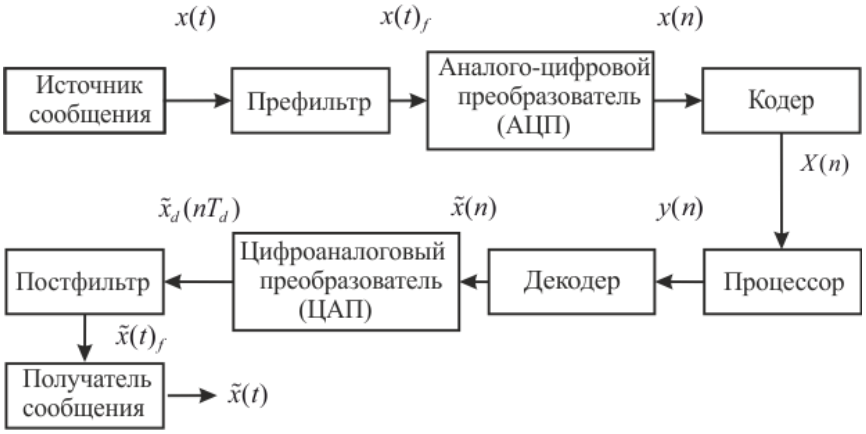


Рис. 1.13. Обобщенная схема цифровой обработки сигналов

Рассмотрим назначения составляющих этой схемы.

1. *Префильтр* обеспечивает удаление определенных спектральных составляющих входного процесса, лежащих вне частотной полосы исходного сигнала. Как правило, префильтрация осуществляется аналоговым фильтром нижних частот (ФНЧ), получившим название антиэлайсингового, поскольку он предотвращает искажения спектра типа наложения (*alising*), которые возникают в спектре цифрового сигнала при недостаточной частоте дискретизации (см. подразд. 1.4). Во временной области эффект наложения означает невозможность точного восстановления аналогового сигнала по его отсчетам. Антиэлайсинговый фильтр формирует аналоговый сигнал с подавленными верхними спектральными составляющими в полосе задержания, начиная с верхнего значения W частоты сигнала. Это дает основание считать сигнал практически ограниченным по частоте и неподверженным эффекту наложения при частоте дискретизации $f_d \geq 2W$ Гц.

2. *Постфильтр* обеспечивает интерполяцию восстанавливаемого сигнала. В качестве постфильтра можно использовать аналоговый сглаживающий ФНЧ с шириной полосы частот, равной W.

3. *Кодер* может включать в себя устройства, устраняющие избыточность информационного сигнала (сжатие); устройства, повышающие достоверность оптимального приема посредством применения кодов, корректирующих ошибки; устройства, обеспечивающие защиту информации применением криптографических алгоритмов, и пр. В простейшем случае в качестве кодера может быть использован АЦП, в качестве декодера – ЦАП.

1.8. Процессы обработки изображений

При обработке изображений различают компьютеризированные процессы (этапы) низкого, среднего и высокого уровня.

Процессы низкого уровня – это предварительный этап обработки с целью повышения качества изображений, который включает в себя:

– улучшение визуального восприятия человеком изображения за счет уменьшения шума, присутствующего на изображении;

– повышение контрастного разрешения;

– реализацию высокого пространственного разрешения – улучшения резкости изображения и др.

Основная идея методов улучшения изображений состоит в том, что наряду с некоторым изображением (объектом интереса), который необходимо извлечь, изображение содержит нежелательные данные, которые требуется удалить. Например, перед применением алгоритмов распознавания объектов необходимо удалить шумовые пиксели, присутствующие на фоне изображения, или вставить недостающие пиксели в образах символов на основе применения морфологических алгоритмов обработки.

Для этого уровня характерно применение различных алгоритмов обработки, как правило, пространственной и (или) морфологической фильтрации входного изображения и получения его улучшенной копии на выходе. Методы предварительной обработки зависят от задач исследований, они разнообразны и могут включать, например, выделение наиболее информативных фрагментов, получение 3*D*-изображений, цветокартирование и пр.

Обработка изображений на среднем уровне охватывает процессы извлечения из изображений определенных признаков интереса, свойств и пр.:

– сегментацию, т. е. разделение изображения на области или выделение на нем объектов интереса;

– описание объектов и эффективное кодирование (сжатие) изображений;

– распознавание отдельных объектов на изображении.

Для среднего уровня характерен процесс обработки входных изображений и получения на выходе признаков и атрибутов, извлекаемых из этих изображений, например, границы области, площади, линии контуров. Важным признаком наблюдаемого объекта может являться его движение, скорость, направления движения и др.

Для высокого уровня характерны процессы с изображением, связанные с машинным зрением и анализом распознанных объектов. Операции распознавания на изображениях определенных объектов, как правило, предваряются обработкой изображений на низком и среднем уровнях для создания условий, повышающих эффективность и качество выделения и распознавания искомых или изучаемых объектов.

1.8.1. Иерархическая структура операций обработки изображений

Обработка изображений начинается с получения изображения с помощью подходящей системы (датчиков, оптопреобразователей) его формирования. Далее изображение преобразуется в цифровую форму (см. подразд. 1.1). На этом этапе предварительной обработки может осуществляться несколько различных операций. Например, если датчик имеет нелинейные характеристики, то их необходимо скорректировать. Яркость и контрастность изображения могут потребовать улучшения. Как правило, также необходимы координатные преобразования для восстановления геометрических искажений, внесенных при формировании

изображения. На этапе предварительной обработки применяются надлежащие процедуры фильтрации, для того чтобы отличить объекты интереса от всех других и от фона. При этом должна учитываться возможная неравномерность освещения. Это означает, что должны распознаваться области постоянных признаков и неоднородностей с помощью сегментации. Основными инструментами для этой задачи являются операции усреднения.

Заранее известные модели описания помех, шумов, возмущений, имеющихся на изображениях, к примеру, обусловленные расфокусировкой оптики, размытостью изображения, вызванной движением объекта, искажениями при передаче по физическим каналам сигналов изображений, позволяют исправлять и корректировать обрабатываемые изображения.

Зная геометрическую форму объекта, можно использовать морфологические операторы для ее анализа и модификации или выделить дополнительную информацию, такую, как средний уровень яркости, площадь, периметр и другие параметры формы объекта.

Иерархическая структура задач цифровой обработки изображения представлена на рис. 1.14, где многие этапы обработки изображений реализуются на основе применения пространственных методов – процедур, оперирующих непосредственно значениями пикселей в пространственной области.

Рис. 1.14. Иерархическая структура этапов цифровой обработки изображений от получения до понимания [5]

1.8.2. Представление изображений

Изображение описывается пространственным распределением энергетической освещенности $f(x, y)$ двух пространственных переменных на плоскости. Точка на $2D$-сетке называется пикселем (*pixel – picture element*). Значение пикселя представляет среднюю освещенность в точке $2D$-сетки.

Пространственная область – это множество пикселей, составляющих изображение. Процессы пространственной обработки описываются уравнением

$$g(x, y) = T[f(x, y)], \tag{1.17}$$

где $f(x, y)$ – входное изображение;

$g(x, y)$ – обработанное изображение;

T – оператор над f, определенный в некоторой окрестности точки с координатами (x, y).

Подход в определении окрестности вокруг точки (x, y) заключается в использовании квадратной области – подмножества изображения, центрированного в точке (x, y) (рис. 1.15). Центр данного подмножества передвигается от пикселя к пикселю, начиная с верхнего левого угла.

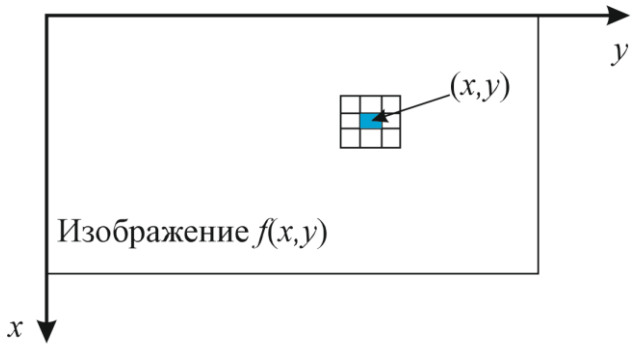


Рис. 1.15. Окрестность 3×3 вокруг точки (x, y) изображения $f(x, y)$

Оператор T выполняется в каждой точке (x, y), давая в результате выходное значение g для данной точки. Процесс использует только пиксели внутри области изображения, ограниченной некоторой окрестностью. Простейшей формой оператора T является точечный оператор, когда окрестность имеет размеры 1×1 (т. е. один пиксель). Функция g зависит только от значения f в единственной точке (x, y). В этом случае оператор T становится функцией градационного преобразования вида

$$s = T(r), \tag{1.18}$$

где r и s – переменные, обозначающие соответственно значения яркостей пикселей изображений f и g в каждой точке (x, y).

Преобразование (1.18) отображает значение r энергетической освещенности пикселя в значение s. Как и для $1D$-сигналов энергетической освещенности ставится в соответствие конечное число уровней яркости посредством операции квантования. При 8-битном представлении уровней яркости (полутонов) изображение квантуется на 256 уровней. Заметим, современный стандарт ТВЧ предусматривает 10-битное кодирование, что дает 1024 уровня квантования.

1.8.3. Пространственное и яркостное разрешения

Пространственное разрешение. Для наблюдения цифрового изображения размер пикселя должен быть меньше, чем пространственное разрешение зрительной системы с определенного расстояния. Размер пикселя должен быть меньше мельчайших различимых деталей на изображении. Предположим, что построен чертеж, состоящий из вертикальных линий с шириной W, разделенных промежутками также с шириной W. Пара линий – это одна линия с примыкающим с одной стороны промежутком. Ширина пары линий составляет $2W$. Таким образом, на единице длины размещается $1/2W$ пар линий. Определение пространственного разрешения состоит в указании максимального числа различимых пар линий на единицу длины. Например, 200 пар линий на один миллиметр. Для дисплеев используется параметр *ppi* (число пикселей на дюйм). Плотность пикселей определяет качество изображения. Более высокая плотность пикселей обеспечивает более качественное изображение. При этом плотность пикселей также зависит от размера экрана. Оптимальная плотность пикселей находится в интервале 400–1000 *ppi*.

Яркостное разрешение. Цифровые изображения воспроизводятся в виде дискретного множества элементов с различной яркостью. Значение интенсивности черно-белого изображения в точке с координатами (x,y) называется уровнем серого или яркостью $l = f(x, y)$.

Глаз человека способен различать градации в диапазоне порядка 10^{10} значений яркости. Однако эксперименты показывают, что зрительная система человека не способна работать во всем динамическом диапазоне одновременно. Это явление известно как яркостная адаптация. Общий диапазон одновременно различимых уровней яркости относительно мал.

Яркостное разрешение – это мельчайшее различимое изменение яркости. При практическом выборе числа градаций яркости L приемлемым решением является $L = 2^k = 256$ уровней, т. е. 8-битное представление уровней полутонов. Если используется равномерное квантование, дискретные уровни яркости принимают целочисленные значения в интервале [0, L – 1]. Интервал значений яркости называют динамическим диапазоном изображения. Края интервала яркости принимают за уровень черного (l = 0), что означает значение яркости абсолютно черной поверхности и уровень белого (l = L – 1), что означает яркость абсолютно белой поверхности. Все промежуточные значения в этом интервале соответствуют оттенкам серого. Если интервал значений яркости изображения

занимает большую часть всего диапазона уровней серого, то говорят об изображениях с большим динамическим диапазоном. Такое изображение характеризуется высоким контрастом. Малая контрастность может быть обусловлена тем, что вариации функции яркости пикселей на изображении намного меньше допустимого диапазона шкалы яркостей. Изображение с малым динамическим диапазоном выглядит тусклым.

1.9. Задания для самостоятельного выполнения

1. Дана дискретная последовательность $x(n) = (x(0), \ldots, x(4)) = (1;\ 1{,}5; -1{,}2;\ 4; -4{,}8)$. Записать выражение, определяющее значение отсчета последовательности с номером $n = 3$.

2. Определить количество отсчетов N яркостного сигнала в полном строчном интервале стандарта 4:4:4 с разрешением 1125 строк в кадре, 25 кадров в секунду, частота дискретизации сигнала яркостного канала $f_{d_Y} = 74{,}25$ МГц.

3. Определить ширину полосы частот цифрового телевизионного сигнала стандарта 4:4:4 в формате *Full HD* 1080*p* и при 8-битовом квантовании, частота дискретизации сигнала яркостного канала $f_{d_Y} = 74{,}25$ МГц.

4. Определить потоковую скорость цифрового кодированного сигнала изображения при 8-битовом квантовании и стандарте 4:4:4, частота дискретизации сигнала яркостного канала $f_{d_Y} = 74{,}25$ МГц.

5. Количество активных отсчетов в формате *Full HD* 1080*p* телевизионного изображения 1080×1920, число градаций яркости – 1024. Определить объем памяти, который требуется для хранения изображения в течение одной секунды.

6. Пояснить фильтрующее свойство единичного импульса.

2. ЛИНЕЙНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ СИСТЕМЫ

Во многих приложениях ЦОС ставится задача анализа линейной системы, выяснения особенностей системы и др. Решение задачи анализа, как правило, связано с выяснением связи входных и выходных сигналов на основе линейных алгоритмов. Оценка параметров линейной системы может осуществляться на основе измерения сигналов на входе и на выходе системы.

2.1. Преобразование сигналов линейными системами

Линейная дискретная система (ЛДС) определяется как однозначное преобразование или оператор, переводящий входную последовательность $x(n)$ (вход) в последовательность $y(n)$ (выход). Говорят, $y(n)$ – это отклик или реакция системы на входное воздействие $x(n)$. Математически это записывается как

$$y(n) = T\left[x(n)\right]. \qquad (2.1)$$

Соотношение (2.1) – это правило, или формула, по которой вычисляется реакция системы через отсчеты сигнала, поданного на ее вход. Вид оператора $T[*]$ зависит от свойств конкретной системы. Оператор $T[*]$ определяет характер математических операций при отображении множества $\{x(n)\}$ в множество $\{y(n)\}$. Графически линейная система изображена на рис. 2.1.

Рис. 2.1. Схема линейной системы

Во многих приложениях применяется класс ***линейных систем с постоянными параметрами***. Они сравнительно просты в математическом отношении, дают удобный вид обработки сигналов. Класс линейных систем определяется линейными операциями или принципом суперпозиции. Если $x_1(n)$ и $x_2(n)$ – входные последовательности, а $y_1(n)$ и $y_2(n)$ – выходные, то при подаче на вход последовательности $(ax_1(n) + bx_2(n))$ систему называют линейной тогда и только тогда, когда выполняются свойства аддитивности и однородности:

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ay_1(n) + by_2(n), \quad (2.2)$$

где a и b – постоянные параметры (константы) системы.

Свойство аддитивности. Реакция системы на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие.

Свойство однородности. Умножение входной последовательности на постоянный параметр соответствует выходной последовательности, умноженной на тот же параметр, т. е.

$$T\left[ax(n)\right] = aT\left[x(n)\right] = ay(n).$$

Вывод. Если выражение $y(n) = T[x(n)]$ с линейным оператором описывает систему, то это означает, что в данном преобразовании (отображении) возможны только линейные операции сложения, вычитания и умножения на постоянный параметр. Соотношение вход – выход линейной системы описывается линейным уравнением. Рассмотрим некоторые системы.

1. Дискретная система, описываемая формулой

$$y(n) = x(n - n_d), -\infty < n < \infty, \qquad (2.3)$$

где n_d – натуральное число, называемое задержкой системы, осуществляет сдвиг входной последовательности отсчетов вправо на n_d интервалов дискретизации. Для вычисления отсчета отклика используется единственный отсчет входной последовательности. Говорят, что система (2.3) имеет память и относится к *системам с запоминанием*.

2. Систему, n-й отсчет реакции $y(n)$ которой при каждом n зависит только от отсчета с тем же индексом n входа $x(n)$, называют *системой без запоминания*. Например,

$$y(n) = \left(x(n)\right)^2.$$

3. Система, определяемая уравнением

$$y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k), \qquad (2.4)$$

называется *сумматором*, поскольку значение ее реакции в момент времени n равно сумме значений предыдущих отсчетов входной последовательности. Например, реакция системы для значений $x(n) = (x(0), x(1), x(2))$ равна:

$$y(0) = x(0),$$
$$y(1) = x(0) + x(1),$$
$$y(2) = x(0) + x(1) + x(2).$$

Сумматор удовлетворяет принципу суперпозиции (2.2), т. е. является линейной системой.

2.2. Линейные стационарные системы

В ЦОС широко используется класс инвариантных к сдвигу во времени дискретных систем. Такие системы называются стационарными. В этих системах временной сдвиг (задержка) входного сигнала индуцирует сдвиг выходного сигнала. Если $y(n)$ – отклик на $x(n)$, то $y(n-n_0)$ будет откликом на воздействие $x(n-n_0)$, где n_0 – положительное или отрицательное целое число. Выполняется соотношение

$$T[x(n-n_0)] = y(n-n_0).$$

Пример 2.1. Показать, что сумматор (2.4) является стационарной системой.

Решение. Пусть $x(n-n_0) = x_1(n)$. Для доказательства вычислим отклики $y(n-n_0)$ и $y_1(n)$. По определению сумматора

$$y(n-n_0) = \sum_{k=0}^{n-n_0} x(k),$$

$$y_1(n-n_0) = \sum_{k=0}^{n-n_0} x_1(k) = \sum_{k=0}^{n-n_0} x(k-n_0).$$

Поменяем в последней сумме индекс суммирования на $k_1 = k - n_0$. Напомним, что с изменением индекса суммирования изменяются пределы суммирования:

$$y_1(n) = \sum_{k_1=0}^{n-n_0} x_1(k_1).$$

Имеем $y(n-n_0) = y_1(n)$, т. е. сумматор является стационарной системой.

2.3. Связь между входным и выходным сигналами в линейной системе

Наличие свойств линейности и стационарности позволяет представлять анализируемую систему в удобном виде. Предположим, на вход системы подан единичный импульс $u_0(n)$ (1.10). Отклик системы на этот импульс обозначим $h(n)$ (рис. 2.2).

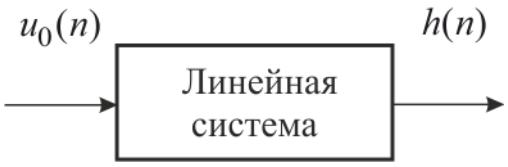


Рис. 2.2. К определению импульсной характеристики

Выход $h(n)$ системы на входное воздействие $u_0(n)$ не будет импульсом с той же идеальной формой. Его физические параметры изменяются во времени. Выход линейной системы является запаздывающей усиленной или подавленной версией входа. Если на вход линейной системы подать последовательность единичных импульсов (рис. 2.3), то результирующий отклик будет формироваться в виде суммы отдельных откликов $h(n)$ (см. свойство аддитивности в подразд. 2.1). Форма выходного сигнала будет определяться свойствами линейной системы, например, некоего фильтра, устройства и пр.

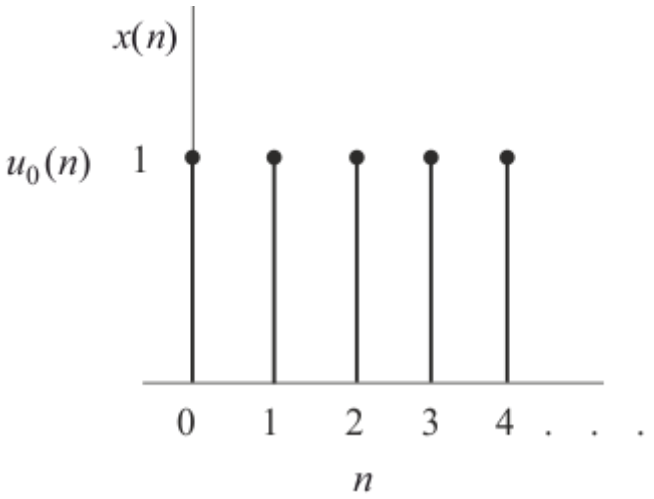


Рис. 2.3. Последовательность единичных импульсов

Представим вход импульсом со свойством единичного, но с иным значением амплитуды (см. свойство однородности в подразд. 2.1). В момент времени $n = 0$ подадим на вход системы отсчет высотой $x(0) > u_0$ или $x(0) < u_0$. Поскольку входной сигнал увеличился (уменьшился) в $x(0)$ раз, то согласно свойству линейной системы отклик на этот сигнал также увеличился (уменьшился) в $x(0)$ раз. Тогда выходной сигнал линейной системы определяется следующими отсчетами:

$$y(0) = x(0)\, h(0),$$
$$y(1) = x(0)\, h(1),$$
$$\ldots$$
$$y(n) = x(0)\, h(n).$$

Возможный отклик на последовательность трех импульсов $x(n)$ иллюстрируется изображением, показанным на рис. 2.4. Видно, что в момент времени $n = 0$ выход равен

$$y(0) = x(0)h(0).$$

В следующий момент времени $n = 1$ выходной сигнал системы состоит из суммы двух компонент:

$$y(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0).$$

Первое слагаемое $x(0)h(1)$ – это запаздывающее влияние входа в момент времени $n = 0$. Второе слагаемое $x(1)h(0)$ – это отклик на текущий импульс $x(1)$.

В момент времени $n = 2$, когда уже поступил третий импульс, выходной сигнал системы состоит из суммы трех компонент вида

$$y(2) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0).$$

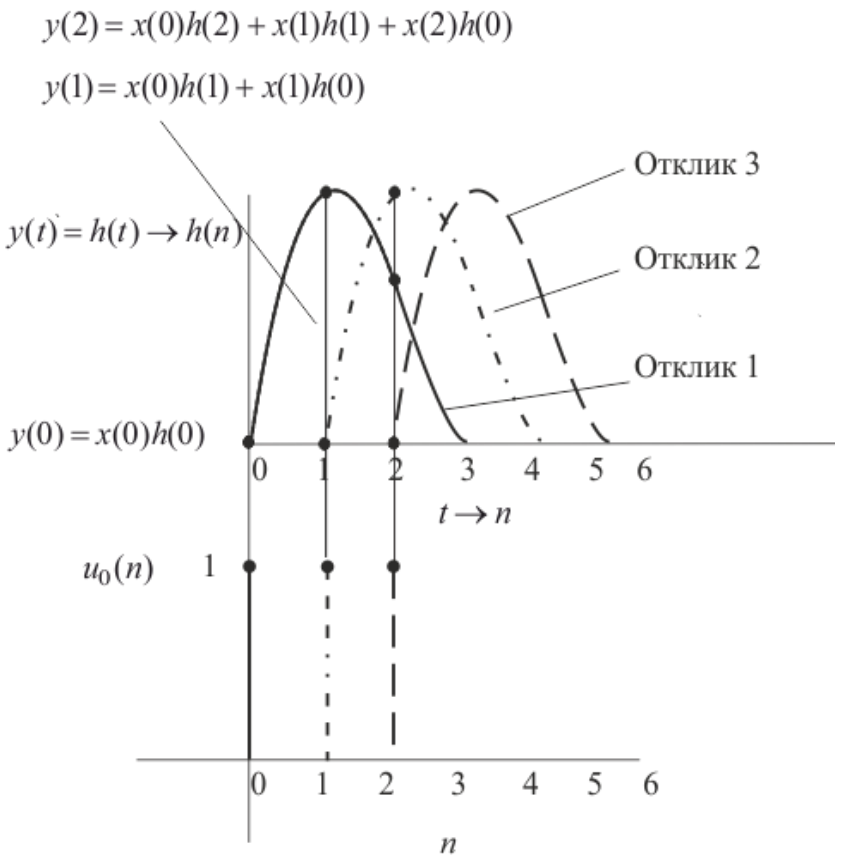


Рис. 2.4. Входные импульсы и импульсные характеристики системы

В момент времени n выходной сигнал системы описывается выражением

$$y(n) = x(0)h(n) + x(1)h(n-1) + \cdots + x(n)h(0).$$

Выводы:

1. Если система линейна, выход можно записать как линейную сумму влияния предыдущих входов.

2. Учитывая свойство линейности и возможность представления любой последовательности в форме линейной комбинации сдвинутых единичных импульсов, можно утверждать, что линейная стационарная система определяется своей реакцией на единичный импульс или импульсной характеристикой при нулевых начальных условиях.

Замечание 2.1. Признаком нулевых начальных условий является отсутствие отклика при отсутствии входной последовательности $x(n)$. Если начальный момент $n = 0$, то ему соответствует

$$\begin{cases} x(n) \equiv 0, \\ y(n) \equiv 0 \end{cases} \text{при } n < 0. \qquad (2.5)$$

Нулевые начальные условия соответствуют физическому принципу причинности, когда отклик не может возникнуть раньше воздействия.

Для описания во временной области ЛДС широко применяются следующие линейные операции:

– свертка, где используется импульсная характеристика;

– разностные уравнения, где используются параметры линейных дискретных систем.

2.4. Операция свертки

Свертка – это одна из наиболее используемых операций в ЦОС. Например, это основная операция, применяемая в алгоритмах фильтрации, обнаружения, декодирования корректирующих кодов и др. Изменение частотных свойств сигнала посредством свертки лежит в основе алгоритмов цифровой фильтрации.

Из свойств стационарности (см. подразд. 2.1) следует, что откликом на последовательность $u_0(n-m)$ будет $h(n-m)$ (рис. 2.5).

Рис. 2.5. Стационарная линейная система

Рассмотрим отклик ЛДС на входную последовательность, представленную в виде (1.12):

$$x(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)u_0(n-m).$$

Из свойств линейности и стационарности ЛДС следует, что откликом на эту последовательность должна быть последовательность

$$y(n) = T\left[\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)u_0(n-m)\right] = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)T\left[u_0(n-m)\right] = \\ = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m), \ -\infty < n < -\infty. \tag{2.6}$$

Если $y(n)$ последовательность, значения которой зависят от отсчетов двух последовательностей $x(n)$ и $h(n)$, определяется выражением (2.6), то говорят, что $y(n)$ есть свертка. Обозначение операции свертки:

$$y(n) = x(n) * h(n). \tag{2.7}$$

Свертка удовлетворяет аксиоме коммутативности

$$y(n) = x(n) * h(n) = h(n) * x(n),$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n-m)h(m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = h(n) * x(n). \tag{2.8}$$

Таким образом, линейная инвариантная к сдвигу ЛДС со входом $x(n)$ и импульсной характеристикой $h(n)$ имеет тот же выход, что и линейная инвариантная к сдвигу система со входом $h(n)$ и импульсной характеристикой $x(n)$.

С учетом нулевых начальных условий (2.5) и конечных значений периодов N_1 и N_2 последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ линейные уравнения (2.6) и (2.8) записываются как

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N_1+N_2-2} x(m)h(n-m), \ n = 0, 1, \ldots, N_1 + N_2 - 2, \tag{2.9}$$

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N_1+N_2-2} h(m)x(n-m), \ n = 0, 1, \ldots, N_1 + N_2 - 2, \tag{2.10}$$

где $N_1 + N_2 - 1$ – длина свертки.

Согласно (2.9) и (2.10) $y(n)$ соответствует дискретной свертке входного воздействия и импульсной характеристике системы. Покажем тождественность результатов вычисления по формуле свертки в двух вариантах ее записи (2.9) и (2.10). Определим значение коэффициента свертки в точке $n = 3$:

$$y(3) = x(0)h(3) + x(1)h(2) + x(2)h(1) + x(3)h(0),$$
$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0). \qquad (2.11)$$

2.5. Алгоритм построения апериодической свертки

Операцию вычисления дискретной свертки по формулам (2.6), (2.9), (2.10) называют *апериодической* (*линейной*) *сверткой*. Выбор варианта свертки определяется удобством применения в ЦОС.

Из формул свертки следует, что $y(n)$, т. е. n-й член выходной последовательности, получается в результате умножения входной последовательности (записанной как функция от m) на другую последовательность (импульсную характеристику), обращенную во времени. Затем при каждом фиксированном $n = 0, 1, \ldots, N_1 + N_2 - 2$ суммируются все произведения вида $x(m)h(n-m)$ с параметром m в качестве параметра суммирования. Необходимость обращения следует из подразд. 2.3, а также из определения операции свертки, где одна из последовательностей записывается как $h(n-m)$. Рассмотрим это утверждение на примере.

Пример 2.2. На рис. 2.6 показана произвольная последовательность $h(m)$. Построить график последовательности $h_1(m) = h(-m)$.

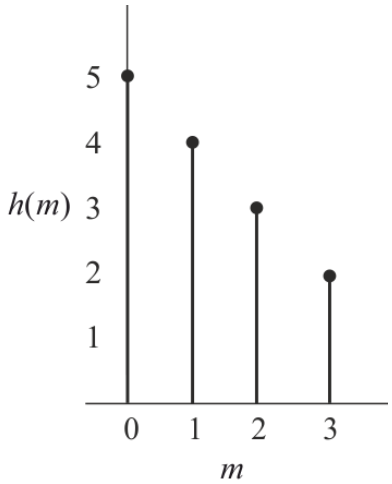


Рис. 2.6. Последовательность $h(m) = (5,4,3,2)$

Решение. Для аргумента $m = 0$ имеем $h_1(0) = h(0) = 5$; для $m = -1$ получаем $h_1(1) = h(-(-1)) = 4$. Вычисляя значения остальных отсчетов, получим

$$h_1(m) = h(-m) = (5,4,3,2).$$

График $h_1(m) = h(-m) = (5,4,3,2)$ изображен на рис. 2.7.

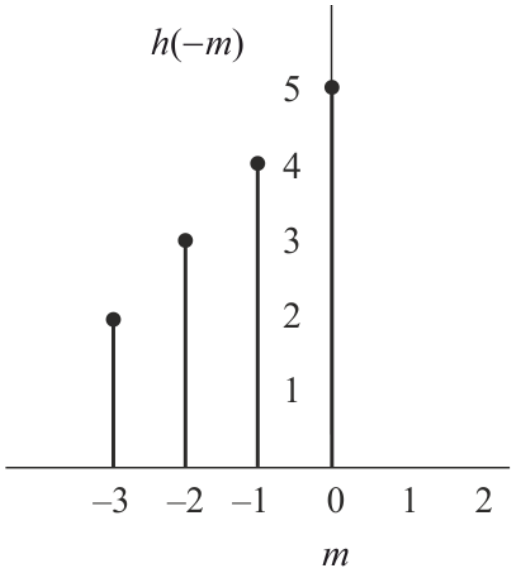


Рис. 2.7. График последовательности $h_1(m) = h(n-m), n = 0$

Далее определим еще одну последовательность:

$$h_2(m) = h_1(m-n) = h(-(m-n) = h(n-m). \qquad (2.12)$$

Из (2.9) и (2.12) следует, что при вычислении каждого коэффициента $y(n)$ необходимо осуществлять сдвиг последовательности $h_1(m) = h(m-n)$ на n интервалов дискретизации вправо.

Пример 2.3. Вычислить свертку ЛДС с импульсной характеристикой $h(n) = (5,4,3,2)$ (рис. 2.8, *а*) и входом (сигналом) $x(n) = (1,1,1)$ (рис. 2.8, *б*).

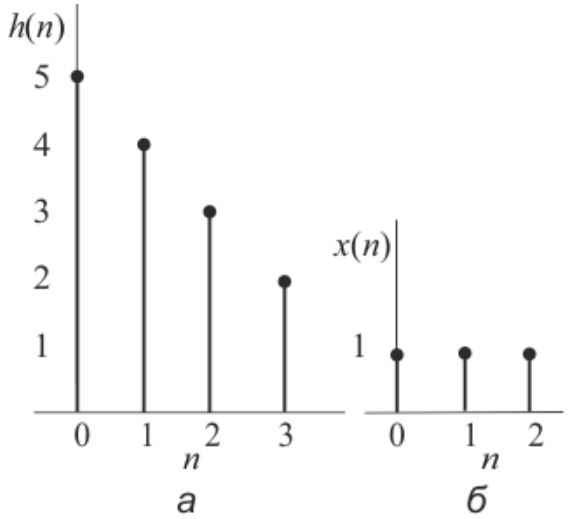


Рис. 2.8. Импульсная характеристика линейной системы (*а*)
и входной сигнал (*б*)

Решение. Коэффициены свертки вычисляем по формуле (2.9):

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N_1+N_2-2} x(m)h(n-m),\ n = 0, 1, \ldots, N_1 + N_2 - 2,$$

$$y(0) = \sum_{m=0}^{6} x(m)h(0-m) =$$

$$= x(0)h(0-0) + x(1)h(0-1) + \ldots + x(6)h(0-6) = x(0)h(0) = 5,$$

$$y(1) = \sum_{m=0}^{6} x(m)h(1-m) = x(0)h(1-0) + x(1)h(1-1) + x(2)h(1-2) + \ldots + x(6)h(1-6) =$$

$$= x(0)h(1) + x(1)h(0) = 9.$$

Продолжая вычисления, получим значения коэффициентов свертки:

$$y(n) = (y(0), y(1), \ldots, y(6)) = (5,\ 9,\ 12,\ 9,\ 5,\ 2).$$

На рис. 2.9 показана реакция ЛДС с импульсной характеристикой $h(n) = (5, 4, 3, 2)$ на входную последовательность $x(n) = (1, 1, 1)$.

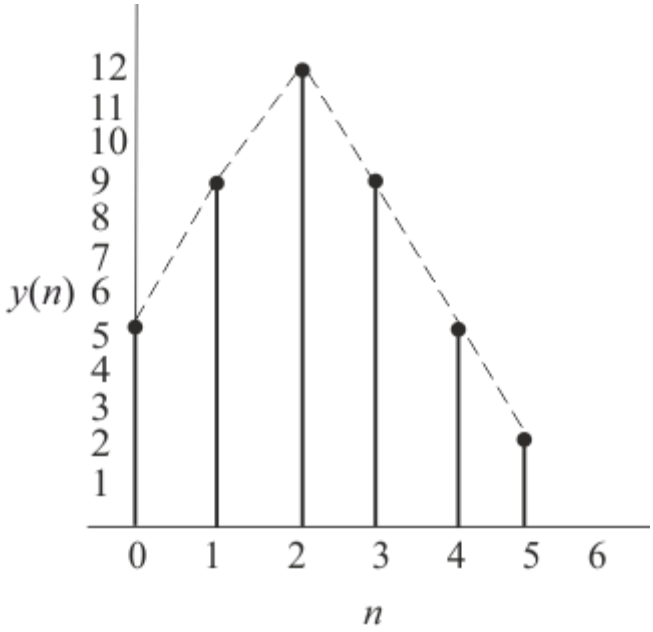


Рис. 2.9. Реакция линейной дискретной системы

Как видно из рис. 2.9, операция свертки над входным процессом привела к формированию сигнала, форма которого отличается от входного. Новая форма сигнала соответствует его новому спектральному образу.

Условно алгоритм сдвига и временные соотношения между последовательностями отображаются на рис. 2.10.

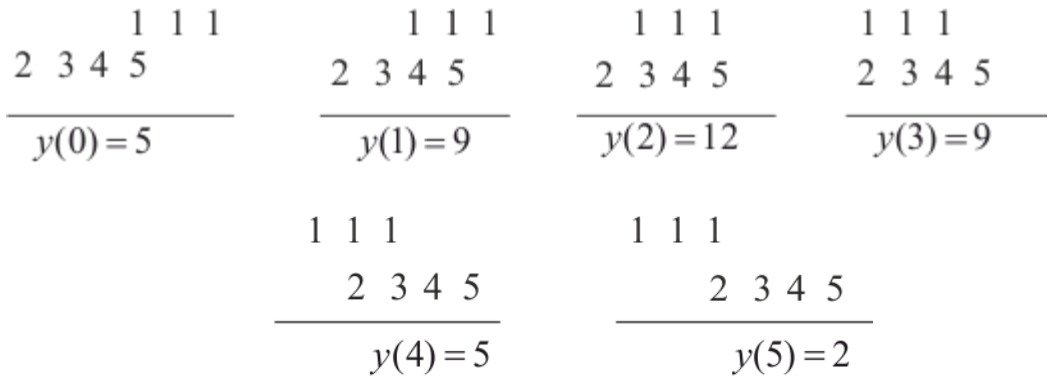


Рис. 2.10. Относительные сдвиги $h(n)$ в алгоритме вычисления свертки

Выводы:

1. В общем случае для вычисления последовательности $h(n-m)$, $-\infty < m < \infty$ необходимо:

– обратить по времени последовательность $h(m)$ относительно точки $m=0$ для получения обращенной (зеркальной) последовательности $h_1(m) = h(-m)$;

– сдвинуть последовательность $h_1(m) = h(-m)$ на n интервалов дискретизации вправо.

2. При свертке двух последовательностей для вычисления n-го члена последовательности $y(n)$ используются все отсчеты последовательностей $x(n)$ и $h(n)$.

3. Если длительность входной последовательности и импульсной характеристики конечны и равны N_1 и N_2, то длительность отклика $y(n)$ также конечна и равна $N = N_1 + N_2 - 1$.

2.6. Алгоритм построения периодической свертки

Определение 2.1. Если исходные последовательности отсчетов сигналов $x(n)$ и $h(n)$ имеют конечные периоды N, их циклическая свертка задается формулой

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n-m)_{\mathrm{mod}(N)}, n = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (2.13)$$

Матричная форма записи свертки

Пример 2.4. Вычислить коэффициенты свертки, если период сигналов $N = 4$.

Решение. По формуле (2.13) записываем коэффициенты $y(n)$ для $n = 0, 1, 2, 3$.

$$y(0) = x(0)h(0) + x(1)h(3) + x(2)h(2) + x(3)h(1),$$
$$y(1) = x(0)h(1) + x(1)h(0) + x(2)h(3) + x(3)h(2),$$
$$y(2) = x(0)h(2) + x(1)h(1) + x(2)h(0) + x(3)h(3),$$
$$y(3) = x(0)h(3) + x(1)h(2) + x(2)h(1) + x(3)h(0).$$

Алгебраическая структура полученных выражений коэффициентов $y(n)$ позволяет использовать более удобную матричную форму записи свертки:

$$\mathbf{y} = \mathbf{Hx},$$
$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y(0) \\ y(1) \\ y(2) \\ y(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h(0) & h(3) & h(2) & h(1) \\ h(1) & h(0) & h(3) & h(2) \\ h(2) & h(1) & h(0) & h(3) \\ h(3) & h(2) & h(1) & h(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{pmatrix}, \qquad (2.14)$$

где $\mathbf{y} = (y(0), y(1), y(2), y(3))^T$ – вектор отсчетов свертки;

H – матрица циклических сдвигов импульсной характеристики $h(n-m)_{\mathrm{mod}(N)}$;

$\mathbf{x} = (x(0), x(1), x(2), x(3))^T$ – вектор отсчетов входа.

Пример 2.5. Вычислить свертку последовательности $x(n) = (1,1,1,-1)^T$ с импульсной характеристикой $h(n) = (-1,1,1,1)^T$, используя матричный алгоритм.

Решение.

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}. \qquad (2.15)$$

График свертки показан на рис. 2.11.

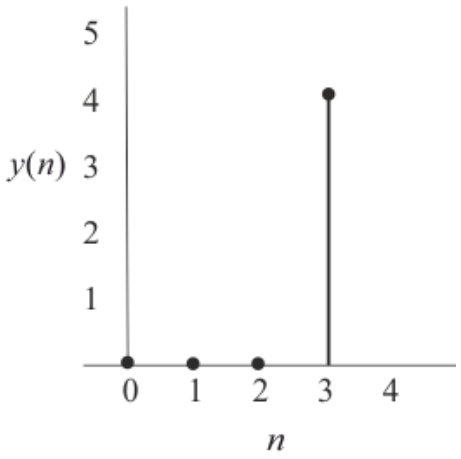


Рис. 2.11. График периодической свертки

2.7. Операция корреляции

Как и свертка, операция корреляция относится к классу основных операций ЦОС.

Функция корреляции. Нормированная взаимная корреляционная функция (ВКФ) $r(t)$ сигналов $x(t)$ и $h(t)$ конечного периода T в непрерывной временной области определяется формулой

$$r(t) = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)h(t+\tau)dt\,,$$

где τ – сдвиг по времени сигнала $h(t)$.

Значения функции корреляции формируются при изменении временного положения одного из сигналов. Корреляционная функция – это показатель сходства или общих линейных свойств двух сигналов. Значение $r(t) = 0$ указывает на нулевую корреляцию. Это означает, что сигналы независимы. Например, если один из сигналов случаен, малые значения $r(t)$ указывают на незначительную корреляцию.

Определение 2.2. Нормированная периодическая взаимная корреляционная функция $r(n)$ последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ записывается как

$$r(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n+m)_{\mathrm{mod}(N)},\ n = 0, 1, \ldots, N-1, \qquad (2.16)$$

где $x(n) = (x(0), x(1), \ldots, x(N-1))$ и $h(n) = (h(0), h(1), \ldots, h(N-1))$ – дискретные периодические последовательности.

Нормированная периодическая автокорреляционная функция (АКФ) $r(n)$ последовательностей $x(n)$ и $h(n)$ записывается как

$$r(n) = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)x(n+m)_{\mathrm{mod}(N)},\ n = 0, 1, \ldots, N-1. \qquad (2.17)$$

Как видно, АКФ определяется для идентичных последовательностей.

Матричное представление корреляции

Пример 2.6. Вычислить коэффициенты корреляции последовательностей $x(n)$ и $h(n)$, если $N = 4$.

Решение. Раскрывая формулу (2.16), получаем следующие коэффициенты:

$$r(0) = \frac{1}{4}(x(0)h(0) + x(1)h(1) + x(2)h(2) + x(3)h(3)),$$
$$r(1) = \frac{1}{4}(x(0)h(1) + x(1)h(2) + x(2)h(3) + x(3)h(0)),$$
$$r(2) = \frac{1}{4}(x(0)h(2) + x(1)h(3) + x(2)h(0) + x(3)h(1)),$$
$$r(3) = \frac{1}{4}(x(0)h(3) + x(1)h(0) + x(2)h(1) + x(3)h(2)).$$

Алгебраическая структура полученных выражений коэффициентов корреляции позволяет использовать более удобную матричную форму записи дискретной функции:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{N}\mathbf{H}\mathbf{x},$$
$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} r(0) \\ r(1) \\ r(2) \\ 3(3) \end{pmatrix} = \frac{1}{N}\begin{pmatrix} h(0) & h(1) & h(2) & h(3) \\ h(1) & h(2) & h(3) & h(0) \\ h(2) & h(3) & h(0) & h(1) \\ h(3) & h(0) & h(1) & h(2) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{pmatrix}, \qquad (2.18)$$

где $\mathbf{r} = (r(0), r(1), r(2), r(3))^T$ – вектор отсчетов корреляции;

$\mathbf{H}$ – матрица циклических сдвигов последовательности $h(n+m)_{\mathrm{mod}(N)}$;

$\mathbf{h} = (x(0), x(1), x(2), x(3))^T$ – вектор отсчетов последовательности $h(n)$.

Вывод. Вычисление взаимной корреляции двух N-периодических последовательностей сводится к циклическому сдвигу одной последовательности относительно другой и усреднения их произведения за период N.

Пример 2.7. Вычислить ВКФ последовательностей $x(n) = (1,1,1,-1)^T$ $h(n) = (-1,1,1,1)^T$.

Решение.

$$\mathbf{r} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

На рис. 2.12 показан график ВКФ.

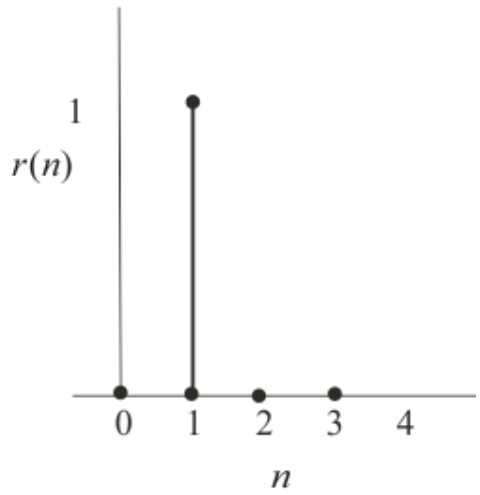


Рис. 2.12. Графическое представление
взаимной корреляционной функции

Рассмотренный математический аппарат ВКФ и АКФ находит очень широкое применение в радиолокации, радионавигации, оптимальной обработке кодированных сигналов и изображений, распознавании, в сфере компьютерного зрения, дистанционного зондирования со спутников, в которых сравниваются данные с различных изображений, в задачах технического контроля качества выпускаемых изделий, климатологии и многих других приложениях.

Например, корреляция используется при проектирования цифровых фильтров в радиолокации. В этом случае положение максимума ВКФ между излучаемым и отраженным от цели сигналом дает величину временной задержки, по которой определяется расстояние. Наиболее сложной задачей в радиолокации является дальнее обнаружение баллистических ракет с последующим сопровождением множественных целей. В режиме обнаружения пространство сканируется с применением корреляционных фильтров, что позволяет обеспечить необходимую дальность обнаружения и достаточное разрешение по скорости. В режиме сопровождения различие в скоростях (боеголовок, ловушек, отражателей и др.) используется для распознавания главных целей.

2.8. Линейные разностные уравнения с постоянными параметрами

Если известны параметры линейной стационарной системы, взаимосвязь между входной последовательностью $x(n)$ и откликом $y(n)$ на выходе описывают линейным разностным уравнением. Разностное уравнение определяет алгоритм построения дискретной системы. По разностному уравнению можно определить характеристики системы, например, частоты, соответствующие нулевому коэффициенту передачи, и др.

Теория линейных разностных уравнений сходна с теорией линейных дифференциальных уравнений, описывающих соотношение вход – выход аналоговой линейной системы. Переход от дифференциальных уравнений к разностным обусловлен различием функций, описывающих сигналы аналоговых систем. Поэтому вычисление производных заменяется вычислением разностей.

Линейное разностное уравнение имеет вид

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k), n \geq 0, \qquad (2.19)$$

где b_i, a_k – вещественные коэффициенты (веса) уравнения, определяющие свойства дискетной системы;

N и M – константы;

i и k – значения задержек для воздействия и отклика;

$x(n-i)$ и $y(n-k)$ – воздействие и отклик, задержанные на i и k периодов дискретизации соответственно.

Уравнение (2.19) характеризуется порядком, равным $\max\{N-1,\ M-1\}$.

Как известно, дифференциальное уравнение решается с помощью методов численного интегрирования. Однако метод численного интегрирования является приближенным. Разностное уравнение (2.19) представляет собой алгоритм вычисления отклика методом простой подстановки $n = 0, 1, 2,$ принципиально не вносящим погрешность. Имея набор начальных условий $x(i)$ и $y(i)$ для значений аргумента n и $x(n)$), по формуле (2.19) можно вычислить $y(n)$ для $n \geq 0$.

Пример 2.8. Линейная система описывается разностным уравнением первого порядка $y(n) = x(n) - 3y(n-1), n \geq 0$. В уравнении постоянными коэффициентами являются $b_0 = 1, b_1 = 0, a_1 = 3$. Входному процессу соответствует выражение $x(n) = n^2 + n$. Начальное условие $y(-1) = 0$. Вычислить выход $y(n)$ ЛДС.

Решение.

$$y(0) = x(0) - 3y(0-1) = 0,$$
$$y(1) = x(1) - 3y(0) = 1 + 1 = 2,$$
$$y(2) = x(2) - 3y(1) = 2^2 + 2 - 3 \cdot 2 = 0,$$
$$y(3) = x(3) - 3y(2) = 3^2 + 3 - 3 \cdot 0 = 12,$$
$$y(4) = x(4) - 3y(3) = 4^2 + 4 - 3 \cdot 12 = -16,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Пример 2.9. Показать, что отклик сумматора ($y(n) = \sum_{k=0}^{n} x(k)$) описывается разностным уравнением.

Решение. По определению 2.4 отклик сумматора запишем в виде

$$y(n-1) = \sum_{k=-\infty}^{n-1} x(k). \qquad (2.20)$$

С учетом (2.20) получаем выражение отклика для дискретного времени n:

$$y(n) = x(n) + \sum_{k=0}^{n-1} x(k). \qquad (2.21)$$

Например, если $n \geq 0$, для $n = 3$ имеем

$$y(3) = \sum_{k=0}^{3} x(k) = x(0) + x(1) + x(2) + x(3) = x(3) + \sum_{k=0}^{2} x(k).$$

Подставив соотношение (2.20) в (2.21), получаем разностное уравнение

$$y(n) = x(n) + y(n-1). \qquad (2.22)$$

По выражению (2.22) можно произвести синтез структурной схемы ЛДС. На рис. 2.13 показана структурная схема, реализующая сумматор на основе разностного уравнения (2.22).

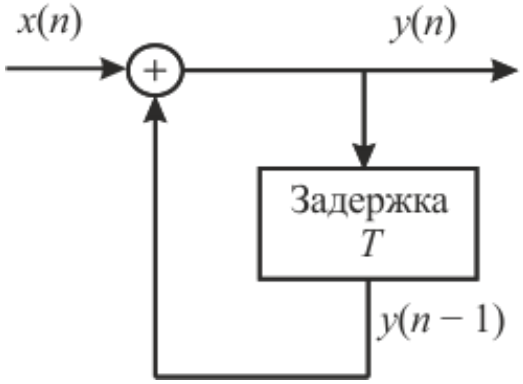


Рис. 2.13. Структурная схема сумматора

Элемент «задержка» осуществляет временную задержку отсчетов на один интервал дискретизации. При каждом значении n складывается значение отсчета входной последовательности с предыдущим значением отсчета выхода сумматора.

Пример 2.10. Проверить работу сумматора.

Решение. Пусть $x(n) = (x(0), x(1)) = (1;\ 4), n \geq 0, y(-1) = 0$. На выходе сумматора имеем следующие значения отсчетов:

$$y(0) = x(0) + y(0-1) = 1,$$
$$y(1) = x(1) + y(0) = 4 + 1 = 5,$$
$$y(2) = x(2) + y(1) = 0 + 5 = 5,$$
$$y(3) = x(3) + y(2) = 0 + 5 = 5,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Таким образом, вход и выход сумматора связаны линейным разностным уравнением первого порядка:

$$y(n) = \sum_{i=0}^{1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{1} a_k y(n-k) = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1).$$

Так как сумматор описывается выражением (2.21), то

$$b_0 = 1, b_1 = 0, a_1 = -1 \text{ и } y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-k). \qquad (2.23)$$

Если использовать форму уравнения (2.23), структурная схема сумматора приобретет вид, представленный на рис. 2.14.

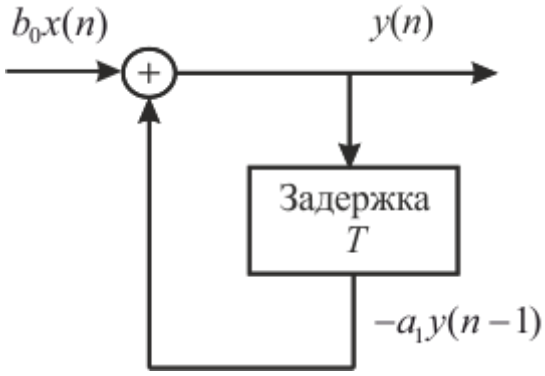


Рис. 2.14. Структурная схема линейной дискретной системы

Замечание 2.2. Уравнения вида (2.22) и (2.23) и схемы, показанные на рис. 2.13 и 2.14, называют рекуррентным (рекурсивным) представлением ЛДС, поскольку каждый отсчет реакции вычисляется с помощью ранее найденных значений отсчетов.

2.9. Рекурсивные линейные дискретные системы

Определение 2.3. Линейная дискретная система называется рекурсивной, если хотя бы один из коэффициентов a_k уравнения

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{M-1} a_k y(n-k), n \geq 0,$$

не равен нулю.

Из уравнения следует, что *n*-е значение отклика рекурсивной ЛДС в каждый момент времени n определяется:

– текущим значением отсчета входа;

– предыдущими значениями отсчета входа;

– предыдущими значениями отсчета выхода.

Например, рекурсивная система первого порядка описывается разностным уравнением с ненулевыми коэффициентами вида

$$y(n) = \sum_{i=0}^{1} b_i x(n-i) - \sum_{k=1}^{1} a_k y(n-k) = \\ = b_0 x(n) + b_1 x(n-1) - a_1 y(n-1). \qquad (2.24)$$

Поскольку стационарная (инвариантная к сдвигу) система характеризуется импульсной характеристикой, вычислим импульсную характеристику рекурсивной ЛДС, удовлетворяющей разностному уравнению первого порядка вида

$$\begin{cases} y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1),\ b_1 = 0, \\ y(n) \equiv 0,\ n < 0. \end{cases} \qquad (2.25)$$

Согласно определению (см. подразд. 2.3), импульсная характеристика – это отклик на единичный импульс, поэтому на входе действует $x(n) = u_0(n)$ и $y(n)$ соответствует $h(n)$. С учетом этого получаем

$$h(n) = b_0 u_0(n) - a_1 h(n-1), n \geq 0.$$

Вычисляем значения отсчетов $h(n)$ методом прямой подстановки:

$$h(0) = b_0 u_0(0) - a_1 h(-1) = b_0,$$
$$h(1) = b_0 u_0(1) - a_1 h(0) = -a_1 h(0) = -a_1 b_0,$$
$$h(2) = b_0 u_0(2) - a_1 h(1) = -a_1 h(1) = -a_1(-a_1 b_0) = a_1^2 b_0,$$
$$h(3) = b_0 u_0(3) - a_1 h(2) = -a_1 h(2) = -a_1(a_1^2 b_0) = -a_1^3 b_0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Вычисление можно продолжать бесконечно по итерационной формуле

$$h(n) = (-1)^n a_1^n b_0 \text{ при } n \to \infty. \qquad (2.26)$$

Выводы:

1. Импульсная характеристика рекурсивной линейной дискретной системы имеет бесконечную длительность.

2. Значения отсчетов $h(n)$ определяются коэффициентами разностного уравнения b_i $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$ и a_k $(k = 1, 2, \ldots, M-1)$.

3. Рекурсивные ЛДС относятся к классу фильтров с бесконечной импульсной характеристикой (БИХ-фильтров).

Заметим, что порядок фильтра указывает, какое число предыдущих выходов надо учитывать.

Далее вычислим отклик рекурсивной линейной системы, описываемой уравнением (2.25), для произвольной входной последовательности $x(n)$:

$$y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1).$$
$$y(0) = b_0 x(0), \text{ так как } y(-1) \equiv 0,$$
$$y(1) = b_0 x(1) - a_1 y(0) = b_0 x(1) - a_1 b_0 x(0),$$
$$y(2) = b_0 x(2) - a_1 y(1) = b_0 x(2) - a_1 [(b_0 x(1) - a_1 b_0 x(0)] =$$
$$= b_0 x(2) - a_1 b_0 x(1) + {a_1}^2 b_0 x(0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Подставляя полученные ранее значения коэффициентов импульсной характеристики ($h(0) = b_0, h(1) = -a_1 b_0, \ldots$) (2.26) в уравнение $y(n)$ (2.25), получаем следующие коэффициенты откликов:

$$y(0) = h(0)x(0),$$
$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0),$$
$$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \cdots + h(n-1)x(1) + h(n)x(0). \quad (2.27)$$

Уравнение (2.27) определяет рекурсивную линейную систему первого порядка как устройство выполнения свертки, называемое конвольвером. Весовые коэффициенты конвольвера (2.27) соответствуют коэффициентам импульсной характеристики:

$$h(n) = (-1)^n a_1^n b_0.$$

На рис. 2.15 показана структурная схема, реализующая конвольвер на основе уравнения $y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1)$.

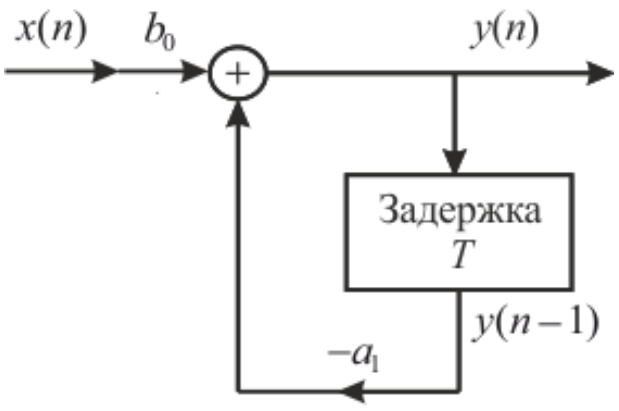


Рис. 2.15. Структурная схема конвольвера

Пример 2.11. Вычислить отклик на выходе конвольвера, описываемого уравнением $y(n) = b_0 x(n) - a_1 y(n-1)$, если $x(n) = \big(x(0), x(1)\big) = (-1;\ 2), b_0 = 1{,}5, a_1 = 2$.

Решение. Отклик конвольвера описывается уравнением

$$y(n) = 1{,}5x(n) - 2y(n-1).$$

Параметры b_0 и a_1 определяют значения импульсной характеристики конвольвера:

$$h(0) = b_0 = 1{,}5,$$
$$h(1) = -a_1 b_0 = -2 \cdot 1{,}5 = -3.$$

Коэффициенты $y(n)$ определяем из выражения (2.27).

$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \cdots + h(n-1)x(1) + h(n)x(0),$$
$$y(0) = h(0)x(0) + h(1)x(-1) = h(0)x(0) = 1{,}5 \cdot (-1) = -1{,}5,$$
$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0) = 1{,}5 \cdot 2 + (-3) \cdot (-1) = 6,$$
$$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) = h(1)x(1) = (-3) \cdot (2) = -6,$$
$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0) = 0.$$

Легко убедиться, что схема, показанная на рис. 2.15, – это вычислитель свертки. На выходе схемы формируются значения $y(n)$. На рис. 2.16 изображен график свертки.

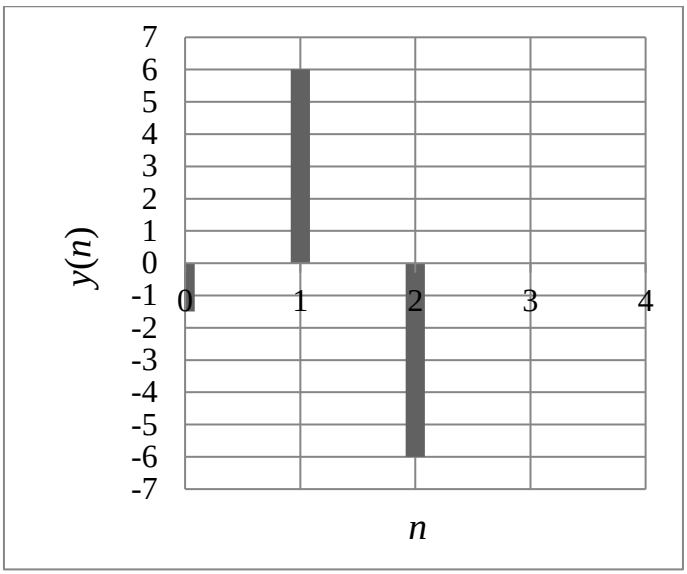


Рис. 2.16. График свертки рекурсивной системы

Структура разностного уравнения определяет алгоритм построения рекурсивной линейной системы. Например, уравнение первого порядка (2.24) можно реализовать с помощью структурной схемы, изображенной на рис. 2.17.

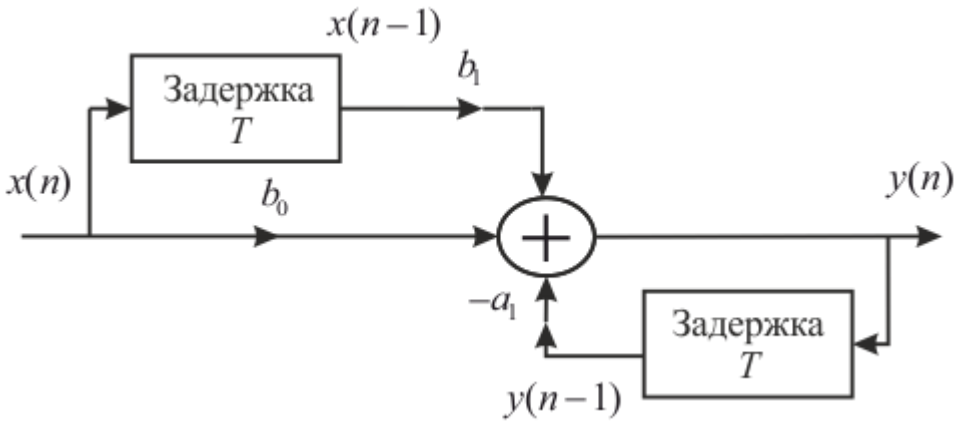


Рис. 2.17. Структурная схема рекурсивной линейной системы

2.10. Нерекурсивные линейные дискретные системы

Определение 2.4. Линейная дискретная система называется нерекурсивной, если все коэффициенты a_k уравнения (2.19) равны нулю. В этом случае уравнение принимает вид

$$y(n) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(n-i). \qquad (2.28)$$

Из уравнения (2.28) следует, что n-е значение отклика нерекурсивной ЛДС в каждый момент времени n определяется:

– текущим значением отсчета входа;

– предыдущим значением отсчета входа.

Например, разностное уравнение нерекурсивной ЛДС второго порядка имеет вид

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2).$$

Пример 2.12. Вычислить импульсную характеристику нерекурсивной системы второго порядка

$$y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2), n \geq 0, y(n) \equiv 0 \text{ для } n < 0. \qquad (2.29)$$

Решение. Согласно определению (см. подразд. 2.3), импульсная характеристика – это отклик на единичный импульс, поэтому на входе действует $x(n) = u_0(n)$ и $y(n)$ соответствует $h(n)$. С учетом этого получаем

$$h(n) = b_0u_0(n) + b_1u_0(n-1) + b_2u_0(n-2).$$

Методом прямой подстановки вычисляем значения отсчетов импульсной характеристики $h(n)$:

$$\begin{gathered} h(0) = b_0u_0(0) + b_1u_0(-1) + b_2u_0(-2) = b_0, \\ h(1) = b_0u_0(1) + b_1u_0(0) + b_2u_0(-1) = b_1, \\ h(2) = b_0u_0(2) + b_1u_0(1) + b_2u_0(0) = b_2, \\ h(3) = b_0u_0(3) + b_1u_0(2) + b_2u_0(1) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ h(0) \equiv 0, \text{ при } n > 2. \end{gathered} \qquad (2.30)$$

Выводы:

1. Импульсная характеристика нерекурсивной линейной дискретной системы имеет конечную длительность.

2. Значения отсчетов $h(n)$ равны коэффициентам разностного уравнения b_i $(i = 0, 1, \ldots, N-1)$, т. е. $h(n) = b_i$.

3. Нерекурсивные ЛДС относятся к классу фильтров с конечной импульсной характеристикой (КИХ-фильтров).

Далее вычислим отклик нерекурсивной ЛДС, описываемой уравнением (2.29), для произвольной входной последовательности $x(n)$. Подставляя полученные ранее значения коэффициентов импульсной характеристики ($h(0) = b_0$, $h(1) = b_1$,…) (2.30) в уравнение $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) + b_2x(n-2)$, получаем следующие коэффициенты откликов:

$$\begin{gathered} y(0) = b_0x(0) + b_1x(-1) + b_2x(-2) = b_0x(0) = h(0)x(0), \\ y(1) = b_0x(1) + b_1x(0) + b_2x(-1) = b_0x(1) + b_1x(0) = \\ = h(0)x(1) + h(1)x(0), \end{gathered}$$

$$y(2) = b_0x(2) + b_1x(1) + b_2x(0) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$y(n) = h(0)x(n) + h(1)x(n-1) + \cdots + h(n-1)x(1) + h(n)x(0). \quad (2.31)$$

Уравнение (2.31) определяет нерекурсивую ЛДС как устройство выполнения свертки (конвольвер).

Пример 2.13. Вычислить отклик на выходе схемы, описываемой уравнением $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1)$, если $x(n) = \big(x(0), x(1)\big) = (-1;\ 2)$, $b_0 = 1{,}5$, $b_1 = -2$.

Решение. Отклик описывается уравнением

$$y(n) = 1{,}5x(n) - 2x(n-1).$$

Параметры b_0 и b_1 определяют значения импульсной характеристики конвольвера. Используя выражение свертки (2.31), определяем коэффициенты $y(n)$:

$$y(0) = h(0)x(0) + h(1)x(-1) = h(0)x(0) = 1{,}5 \cdot (-1) = -1{,}5,$$
$$y(1) = h(0)x(1) + h(1)x(0) = 1{,}5 \cdot 2 + (-2) \cdot (-1) = 5,$$
$$y(2) = h(0)x(2) + h(1)x(1) + h(2)x(0) = h(1)x(1) = (-2) \cdot (2) = -4,$$
$$y(3) = h(0)x(3) + h(1)x(2) + h(2)x(1) + h(3)x(0) = 0.$$

Структура разностного уравнения определяет схему построения нерекурсивной линейной системы. Например, уравнение первого порядка $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1)$ можно реализовать с помощью структурной схемы, изображенной на рис. 2.18.

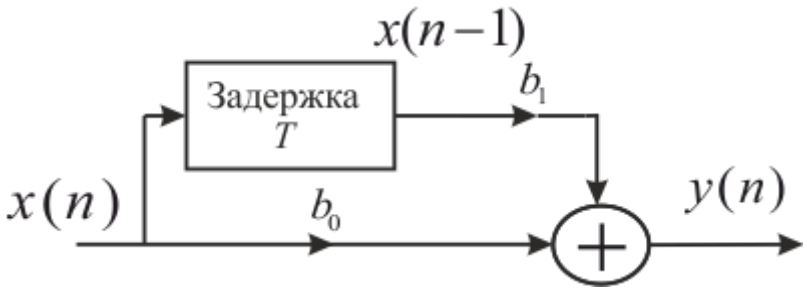
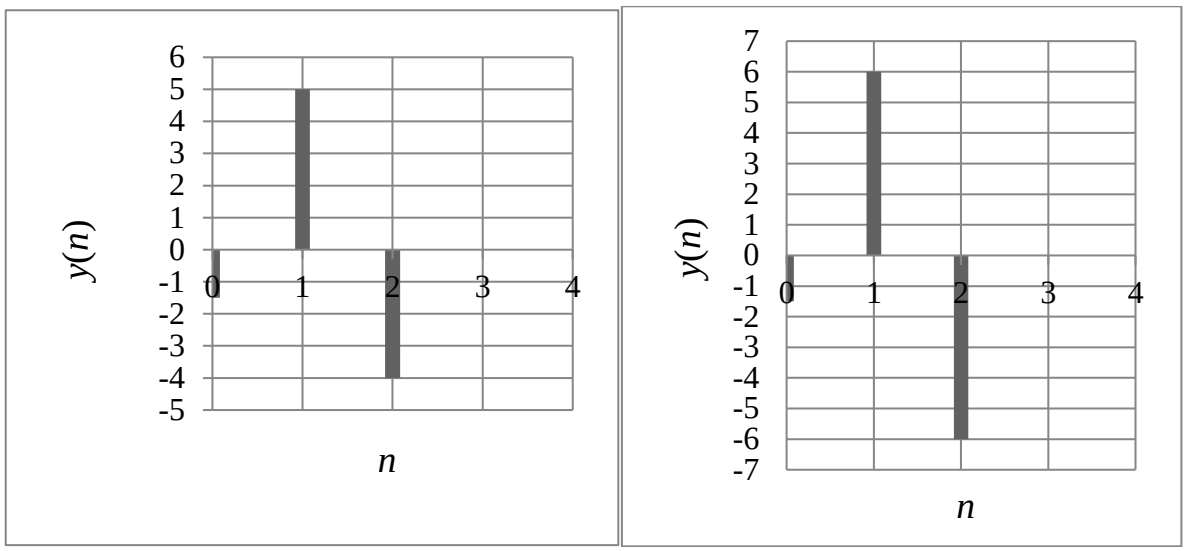


Рис. 2.18. Структурная схема нерекурсивной линейной системы (конвольвер)

Легко убедиться, что схема, показанная на рис. 2.18, – это вычислитель свертки. На выходе схемы формируются значения $y(n)$. На рис. 2.19, *а* изображен график нерекурсивной свертки. Для сравнения с рекурсивной системой на рис. 2.19, *б* показан график свертки рекурсивной системы.



а *б*

Рис. 2.19. Графики свертки нерекурсивной (*а*) и рекурсивной (*б*) систем

2.11. Задания для самостоятельного выполнения

1. Показать, что система $y(n) = (x(n))^2$ нелинейна.

2. Доказать, что система $w(n) = \log_2|x(n)|$ относится к классу нелинейных.

3. Вычислить циклическую (периодическую) свертку последовательностей $h(n) = (1;\ 2;\ 2;\ 3;\ -1)$ и $x(n) = (1;\ 2;\ -1\ ;2;2)$. Изобразить график свертки.

4. Вычислить циклическую (периодическую) корреляционную функцию последовательностей $h(n) = (1;\ 2;\ 2;\ 3;\ -1)$ и $x(n) = (1;\ 2;\ -1\ ;2;2)$. Изобразить график функции.

5. Вычислить циклическую автосвертку последовательности $h(n) = (1;\ 2;2;3;\ -1)$. Изобразить график свертки.

6. Вычислить циклическую (периодическую) автокорреляционную функцию последовательности $h(n) = (1;\ 1;\ 1;\ -1;\ 1)$. Изобразить график функции.

7. Вычислить апериодическую свертку последовательностей $h(n) = (-1,-1,-1,1,1,-1,1,1)$ и $x(n) = (1,1,-1,1,1,-1,-1,-1)$. Построить график свертки.

8. Вычислить периодическую свертку последовательностей $h(n) = (-1,-1,-1,1,1,-1,1,1)$ и $x(n) = (1,1,-1,1,1,-1,-1,-1)$. Построить график свертки.

9. Вычислить ВКФ периодических последовательностей $h(n) = (-1,-1,-1,1,1,-1,1,1)$ и $x(n) = (1,1,-1,1,1,-1,-1,-1)$. Построить график ВКФ.

10. Вычислить АКФ периодической последовательности $x(n) = (1,1,-1,1,1,-1,-1,-1)$. Построить график АКФ.

11. Решить разностное уравнение первого порядка $y(n) = x(n) - -0{,}5y(n-1), n \geq 0$ с начальным условием $y(-1) = 0$ и $x(n) = 0{,}1^n$. Вычислить значения шести отсчетов отклика $y(n)$.

12. Записать уравнение рекурсивной ЛДС второго порядка.

13. Вычислить импульсную характеристику рекурсивной системы и отклик $y(n)$ для произвольного входа $x(n)$. Соотношение вход – выход ЛДС описывается уравнением $y(n) = x(n) + ay(n-1), n \geq 0$.

14. Показать, что разностное уравнение $y(n) = b_0x(n) + b_1x(n-1) - -a_1y(n-1)$ описывает конвольвер.

15. Изобразить структурную схему рекурсивной ЛДС второго порядка.

16. Вычислить импульсную характеристику нерекурсивной ЛДС, которая задается разностным уравнением третьего порядка.

17. Изобразить структурную схему нерекурсивной ЛДС третьего порядка.

3. АЛГОРИТМЫ ОПИСАНИЯ СИСТЕМ И СИГНАЛОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

3.1. Ряды Фурье

Любой сложный сигнал можно представить на временном интервале $t + lT$ бесконечным тригонометрическим рядом Фурье. Любой сложный сигнал описывается в виде суммы гармонических колебаний, называемой рядом Фурье.

3.1.1. Ряд Фурье в тригонометрической форме

Определение 3.1. Если сложный или произвольный сигнал периодический, т. е.

$$x(t) = x(t + lT), -\infty < t < \infty,$$

то его математической моделью может служить бесконечный ряд Фурье в тригонометрической форме:

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos(\omega_0 t) + b_1 \sin(\omega_0 t) + a_2 \cos(2\omega_0 t) + b_2 \sin(2\omega_0 t) + \\ + a_3 \cos(3\omega_0 t) + b_3 \sin(3\omega_0 t) + \ldots + a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \sin(k\omega_0 t) + \ldots . \quad (3.1)$$

Поясним введенные обозначения и составляющие ряда:

1) $T = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}$ – период повторения сигнала;

2) $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$ – основная круговая частота сигнала;

3) $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ – основная линейная частота сигнала;

4) a_0 – среднее значение сигнала за период T;

5) $a_1 \cos(\omega_0 t), b_1 \sin(\omega_0 t)$ – составляющие сигнала со значением основной частоты ω_0.

Замечание 3.1. Компоненты $a_1 \cos(\omega_0 t)$ и $b_1 \sin(\omega_0 t)$ называют основными гармониками; $a_2 \cos(2\omega_0 t), b_2 \sin(2\omega_0 t)$ – составляющие сигнала частотой $2\omega_0$ или вторые гармоники; $a_k \cos(k\omega_0 t), b_2 \sin(k\omega_0 t)$ – составляющие сигнала частотой $k\omega_0$ или k-е гармоники.

Таким образом, сигнал $x(t)$ описывается бесконечным набором гармоник.

В общем виде ряд Фурье записывают как

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\omega_0 t) + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(k\omega_0 t), \quad (3.2)$$

где $\{a_0, a_k, b_k\}$ – множество коэффициентов Фурье, которое состоит из действительных чисел.

Для того чтобы ряд (3.3) сходился, необходимо, чтобы любой сигнал, описываемый периодической функцией времени, удовлетворял условиям Дирихле

(Петер Густав Лежён Дирихле – немецкий математик (1805–1859)). Заметим, большинство моделей реальных сигналов удовлетворяют этим условиям, а именно:

– $x(t)$ за период T имеет конечное число разрывов;

– $x(t)$ за период T имеет конечное число максимумов и минимумов.

Ранее было показано (см. п. 1.2.2), что компоненты $a_k\cos\,(k\omega_0 t)$ и $b_k\sin(k\omega_0 t)$ представляются в виде векторов в полярной системе координат. Каждому компоненту вектора соответствует его длина (амплитуда) c_k и проекции в полярной системе координат (рис. 3.1).

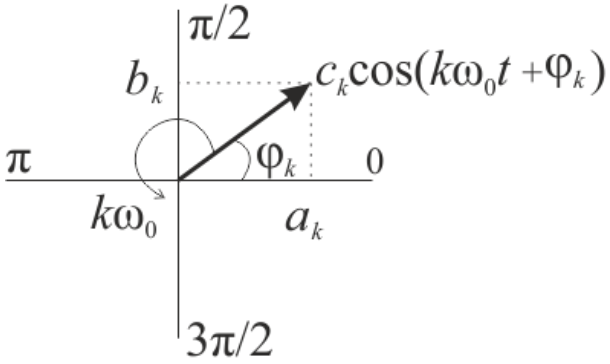


Рис. 3.1. Графическое изображение гармоники $x(t) = c_k\cos(k\omega_0 t + \varphi_k)$

Ряд (3.2) можно записать более компактно, используя известную тригонометрическую формулу линейного сложения гармонических функций

$$a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = c\cos(\omega t - \varphi),$$

где $c = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$$\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right).$$

С учетом сказанного ряд Фурье

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k),$$

где $\left|\mathbf{c}_k\right| = \sqrt{{a_k}^2 + {b_k}^2}$ – значение амплитуды вектора $\mathbf{c}_k$.

В момент времени $t = 0$ вектор $\mathbf{c}_k$ имеет значение начальной фазы

$$\varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{b_k}{a_k}\right). \qquad (3.3)$$

Множество $\{c_0, b_k, a_k\}$ коэффициентов Фурье образуют спектр Фурье периодического сигнала $x(t)$. Спектр такого сигнала определяется по следующим формулам:

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_0^T x(t)dt,$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)(\cos k\omega_0 t)dt,$$

$$b_k = \frac{2}{T}\int_0^T x(t)\,(\sin k\omega_0 t)dt\,.$$

Отметим, что имеется другая запись ряда Фурье:

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(k\omega_0 t + \varphi_k).$$

Здесь $c_k = \sqrt[2]{a_k^2 + b_k^2}$, $\varphi_k = \operatorname{arctg}\left(\frac{a_k}{b_k}\right)$.

Таким образом, спектр периодического сигнала представляется в виде постоянной составляющей и бесконечного числа гармонических колебаний (синусоидальных или косинусоидальных) с соответствующими амплитудами и начальными фазами.

Пример 3.1. Имеется временное представление гармонического колебания $x(t) = x_m \cos(\omega_0 t - \varphi_0) = x_m \cos(2\pi f_0 t - \varphi_0) = x_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \varphi_0\right)$. Представить данное колебание в частотной области.

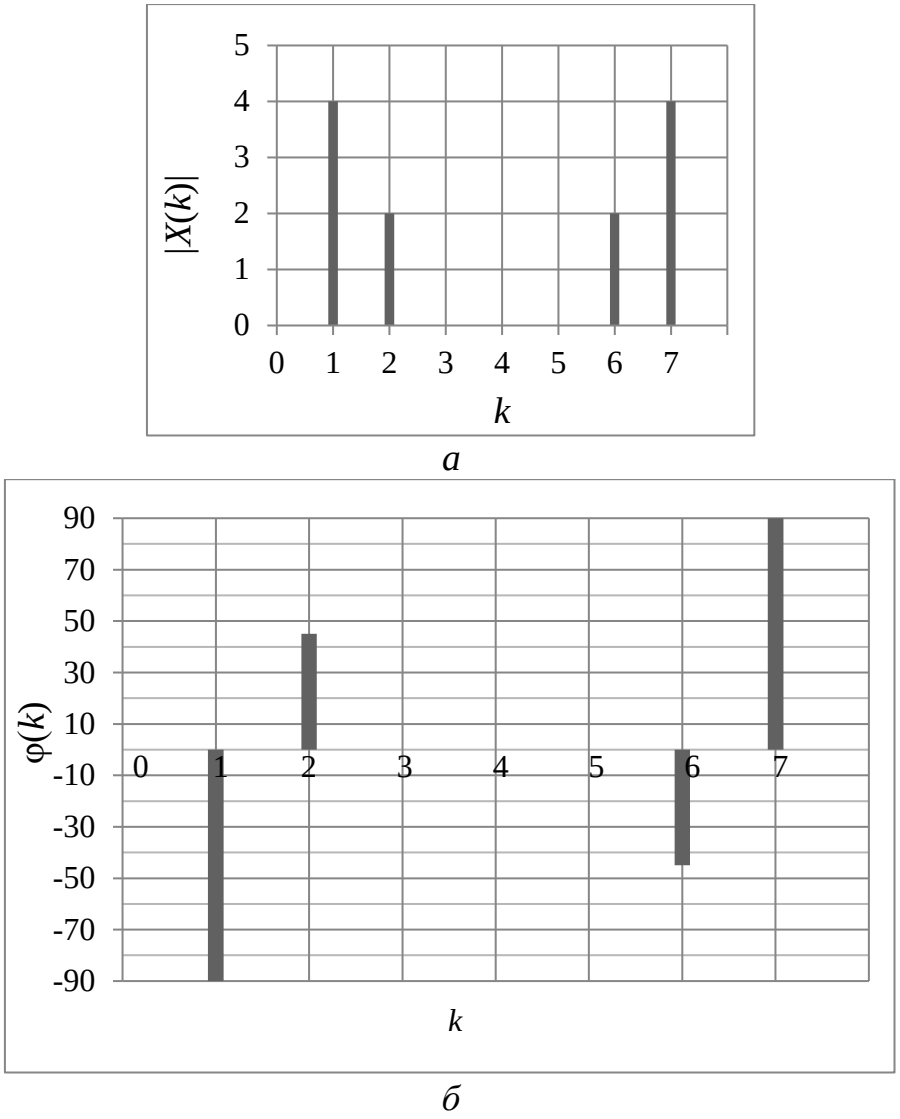
Решение. Для представления такого колебания в частотной области достаточно задать две функции частоты, показывающие, что на частоте $\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}$ амплитуда сигнала равна x_m, а начальная фаза равна φ_0, т. е.

$$x(\omega) = \begin{cases} x_m, \omega = \omega_0, \\ 0, \omega \neq \omega_0, \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\varphi(\omega) = \begin{cases} \varphi_0, \omega = \omega_0, \\ 0, \omega \neq \omega_0. \end{cases} \tag{3.5}$$

Значение $x(\omega_0) = x_m$ называется амплитудным спектром гармонического колебания, а $\varphi(\omega_0) = \varphi_0$ – фазовым спектром гармонического колебания. Их совокупность – просто спектр.

На рис. 3.2. показаны амплитудный и фазовый спектр некоторого периодического фрагмента речевого сигнала.



а

б

Рис. 3.2. Амплитудный (*а*) и фазовый (*б*) спектры сигнала

Для периодического сигнала каждая гармоническая составляющая изображена вертикальными отрезками, длины которых равны ее амплитуде и фазе. Как видно, спектр периодического сигнала является дискретным. Частоты всех гармоник кратны основной частоте. Это означает, что если периодический сигнал следует с частотой, например, 1 кГц, то в его спектре могут быть только частоты 0, 1, 2 кГц и т. д. В спектре такого периодического сигнала не могут присутствовать частоты 1,5 или 1,2 кГц.

3.1.2. Ряд Фурье в комплексной форме

С целью упрощения расчетов часто используют вместо тригонометрической формы записи ряда Фурье его комплексную форму. Расчет спектров сигналов на комплексной области значительно проще, поскольку нет необходимости рассматривать отдельно коэффициенты a_k и b_k.

Ранее (см. п. 1.2.2) отмечалось, что для представления (описания) сигналов и систем широко применяется комплексная экспоненциальная функция (1.9)

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t,$$

где $j = \sqrt[2]{-1}, \omega t \in \mathbb{R}$.

Функция $e^{j\omega t}$ отражает положение комплексного числа $e^{j\omega t}$ (точки) на единичной окружности комплексной плоскости (рис. 3.3).

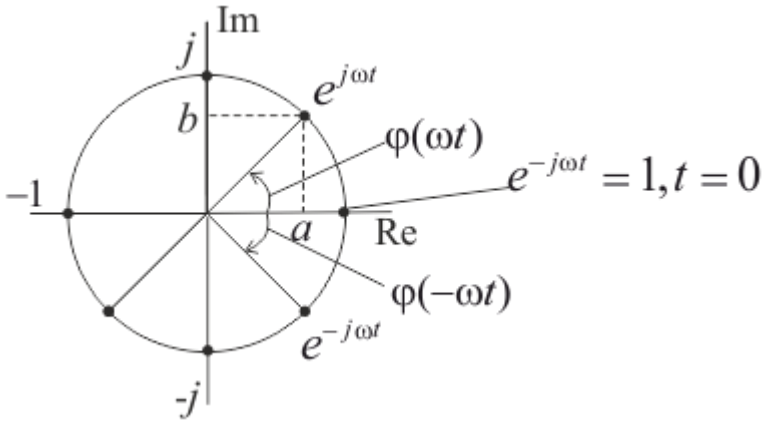


Рис. 3.3. Графическое представление функции $e^{j\omega t}$

Прямая, соединяющая эту точку с началом координат, образует с действительной осью угол $\varphi = \omega t$. Точка движется по окружности против часовой стрелки со скоростью $\omega\,(\text{рад/с})$. Выражение $e^{j\omega t}$ – это единичный вектор, угол которого линейно нарастает со временем со скоростью $\omega\,(\text{рад/с})$. Выражение $e^{-j\omega t}$ соответствует вектору, угол которого нарастает в противоположном направлении с той же скоростью. Поскольку

$$e^{-j\omega t} = \cos(-\omega t) + j \sin(-\omega t) = \cos(\omega t) - j \sin(\omega t) = (e^{j\omega t})^*,$$

где $(e^{j\omega t})^*$ обозначает комплексно-сопряженную функцию.

Следовательно, сигналы вида $x_1(t) = e^{-j\omega t}$ и $x_2(t) = e^{j\omega t}$ имеют одинаковые частоты. Понятие отрицательной частоты следует из этих представлений. Сумма сигналов выражает действительную функцию времени

$$x_1(t) + x_2(t) = e^{-j\omega t} + e^{j\omega t} =$$
$$= \cos(\omega t) - j\sin(\omega t) + \cos(\omega t) + j\sin(\omega t) = 2\cos(\omega t). \quad (3.6)$$

Разность $x_2(t)$ и $x_1(t)$ выражает комплексную функцию времени вида

$$x_2(t) - x_1(t) = e^{j\omega t} - e^{-j\omega t} =$$
$$= (\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)) - (\cos(\omega t) + j\sin(\omega t)) = 2j\sin(\omega t). \quad (3.7)$$

С учетом (3.6) и (3.7) получаем выражения действительных гармонических функций:

$$\cos(\omega t) = \frac{e^{-j\omega t} + e^{j\omega t}}{2}, \quad (3.8)$$
$$\sin(\omega t) = \frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j},$$
$$\sin(\omega t) = \frac{-j(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t})}{2j}. \quad (3.9)$$

Подставляя (3.8) и (3.9) в выражение (3.2) ряда Фурье в тригонометрической форме, получаем

$$x(t) = a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k\left(e^{-jk\omega_0 t} + e^{jk\omega_0 t}\right) - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} jb_k(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t}) =$$
$$= a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\left(e^{-jk\omega_0 t} + e^{jk\omega_0 t}\right) - jb_k(e^{jk\omega_0 t} - e^{-jk\omega_0 t})) =$$
$$= a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-jk\omega_0 t} + a_k e^{jk\omega_0 t} - jb_k e^{jk\omega_0 t} + jb_k e^{-jk\omega_0 t} =$$
$$= a_0 + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}(a_k - jb_k)e^{jk\omega_0 t} + (a_k + jb_k)e^{-jk\omega_0 t}. \quad (3.10)$$

Введем обозначения $c_k = (a_k - jb_k)$ и $c_k{}^* = (a_k + jb_k)$. Выражение (3.10) запишем в виде

$$x(t) = a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} + c_k{}^* e^{-jk\omega_0 t} =$$
$$= a_0 + \tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k^* e^{-jk\omega_0 t}. \quad (3.11)$$

Компонент

$$\tfrac{1}{2}\textstyle\sum_{k=1}^{\infty} c_k^*\, e^{-jk\omega_0 t} = \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k\, e^{jk\omega_0 t}.$$

Тогда выражение (3.11) запишется как

$$x(t) = a_0 + \frac{1}{2}\sum_{k=-\infty}^{-1} c_k e^{jk\omega_0 t} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = a_0 + \sum_{\substack{k=-\infty \\ k\neq 0}}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \\ = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}.$$

Определение 3.2. Разложение аналогового периодического сигнала $x(t)$ в комплексный ряд Фурье описывается формулой

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}. \qquad (3.12)$$

Из формулы (3.12) следует, что любой сложный периодический сигнал может быть представлен в виде суммы гармонических колебаний с частотами, кратными основной частоте. Комплексные коэффициенты c_k ряда (3.14) называются коэффициентами Фурье.

Совокупность комплексных амплитуд c_k называют комплексным спектром периодического сигнала. Совокупность значений $|c_k|$ и φ_k называется спектром периодического сигнала. Амплитуды гармоник $|c_k|$ характеризуют амплитудный спектр, а начальные фазы φ_k – фазовый спектр. Угол φ_k отражает ориентацию комплексного вектора относительно направления действительной оси. На рис. 3.4 показана геометрическая интерпретация c_k.

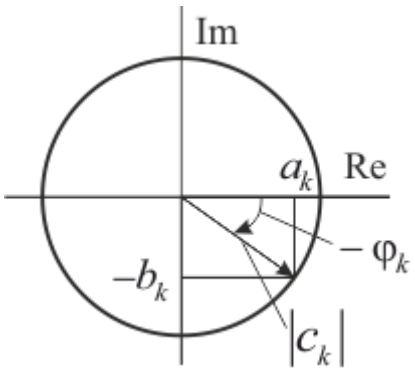


Рис. 3.4. Геометрическая интерпретация спектра

3.2. Дискретная форма ряда Фурье

Для перехода из непрерывной формы описания ряда Фурье в дискретную произведем замену непрерывных параметров сигнала на дискретные.

Период и основная частота дискретного сигнала определяются из выражений (см. подразд. 1.4)

$$T = NT_d = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0},$$

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{NT_d}.$$

Замену непрерывных параметров сигнала на дискретные произведем по алгоритму

$$x(t) \to x(nT_d) \to x(n),$$
$$c_k \to X(k),$$
$$\omega_0 \to \frac{2\pi}{NT_d},$$
$$t \to nT_d,$$
$$t \to n,$$

где t – текущее (непрерывное) время.

Из (3.12) получаем дискретную форму ряда Фурье на конечном интервале наблюдения:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \to x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{k2\pi nT_d}{NT_d}} = \\ = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi nk}{N}}. \quad (3.13)$$

Рассмотрим **конечную дискретную комплексную экспоненциальную последовательность**.

Определение 3.3. Дискретный сигнал (функция) вида

$$x(n) = \mathrm{def}(kn) = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}kn\right) = \cos\frac{2\pi}{N}kn - j\sin\frac{2\pi}{N}kn \quad (3.14)$$

называется конечной дискретной комплексной экспоненциальной последовательностью. Вещественная и мнимая часть последовательности (3.16) меняется синусоидально в зависимости от n и k.

Последовательность $x(n) = e^{-j\frac{2\pi nk}{N}}$ задается на конечном интервале времени $[0, N)$, где N – целое положительное число. Величина $T = NT_d$ определяет основной период комплексной последовательности. В этом случае $\omega_0 = \frac{2\pi}{NT_d}$ есть значение круговой частоты последовательности, которое определяет период дискретизации по частоте. Фактически (3.14) соответствует дискретному варианту формулы Эйлера (1.9). Другие обозначения (3.14) известны как

$$\mathrm{def}(kn) = W^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}, k = 0, 1, \dots, N-1, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

где $W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ – поворачивающий множитель.

Так как показатель степени комплексного числа $\text{def}(kn) = e^{-j\omega t}$ со знаком «минус», то функция описывает точку, которая движется по окружности в направлении часовой стрелки.

В выражении (3.16) переменные n (время) и k (частота) изменяются дискретно, в отличие от (1.9), где параметры t (время) и ω (частота) изменяются непрерывно. Огибающая дискретных значений функции $e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ соответствует функции $e^{j\omega t}$. На рис. 3.5 иллюстрируется графическое представление функции W^{kn}.

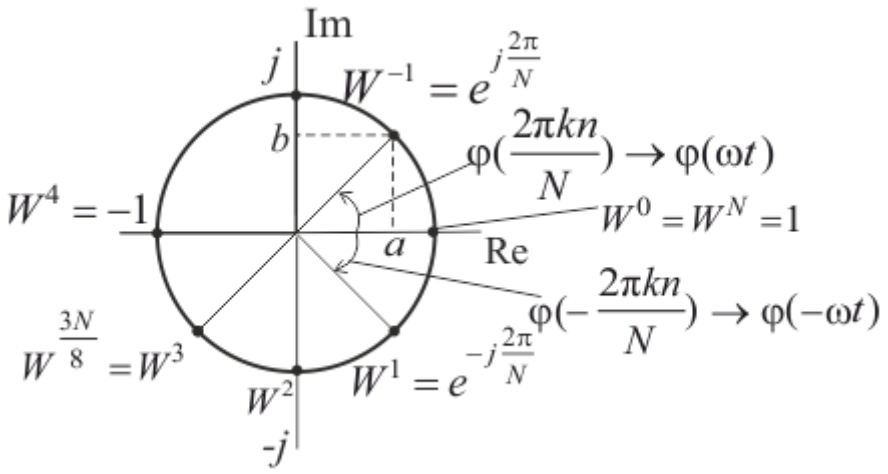


Рис. 3.5. Графическая иллюстрация функции $W^{kn} = e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

Когда переменная n последовательно принимает значения $0, 1, \ldots, N-1$, то через N шагов комплексный вектор ДЭФ проходит 2π радиан или совершает один оборот на комплексной плоскости. Вращаясь, вектор ДЭФ занимает на плоскости N положений (см. рис. 3.5). Очевидно, если за время $T = NT_d$ вектор ДЭФ проходит 4π радиан, т. е. совершает два оборота на комплексной плоскости, то частотный индекс $k = 2$. Таким образом, индекс k определяет частотные свойства комплексной экспоненты.

Функция W^{kn} соответствует единичному вектору на комплексной плоскости, угол которого линейно нарастает со временем. Модуль комплексного числа W^{kn} равен

$$|W^{kn}| = \left|e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}\right| = 1, \text{ а его аргумент } \varphi = \text{arktg}\frac{\text{Im}W^{kn}}{\text{Re}W^{kn}}.$$

Пример 3.2. Вычислить значения аргумента φ_n (фазы) вектора ДЭФ для $k = 1, n = 0,1,2,\ldots,7, N = 8$.

Решение. Величина фазы вектора ДЭФ за дискретное время n определяется по формуле

$$\varphi_n = \frac{2\pi}{N} n,\ n = 0, 1, \ldots, N-1,$$
$$\varphi_n = (\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{N-1}) = (0°, -45°, -90°, \ldots, -315°).$$

Угол φ_n линейно нарастает со временем

$$t = nT_d,$$

где T_d – интервал дискретизации.

Пример 3.3. Пусть $k = 2, n = 0,1,2,\ldots,7, N = 8$. Вычислить значения аргумента φ_n вектора ДЭФ для $k = 2, n = 0,1,2,\ldots,7, N = 8$.

Решение. Величина фазы вектора ДЭФ за дискретное время n определяется как

$$\varphi_n = \frac{2\pi}{N} n,\ n = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Значения фазы φ_n вектора ДЭФ равны

$$\varphi_n = (0, -90°, -180°, -270°, -360°, -450°, -540°, -630°).$$

Как видно, через восемь шагов дискретного времени комплексный вектор совершает два оборота на комплексной плоскости за то же время, что и в примере 3.2. Вектор ДЭФ движется со скоростью $\frac{2\pi}{N} k$ рад/временной отсчет. Параметр k значения $\frac{2\pi}{N} kn$ определяет скорость нарастания (изменения) фазы или частоту функции W^{kn}. Таким образом, частота функции W^{kn} – это число оборотов, совершаемых вектором ДЭФ на интервале ее определения $[0, N-1]$.

Систему ДЭФ записывают в виде матрицы $\mathbf{V}$, строки которой нумеруются переменной k, столбцы переменной n. В пересечении k-й строки и n-го столбца записывается величина W^{kn}. На рис. 3.6 изображена структура матрицы $\mathbf{V}$.

$$\mathbf{V} = \begin{array}{c} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ N-1 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0 & 1 & \cdots & n & \cdots & N-1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & W^{kn} & \cdots & \cdots \\ & & & \vdots & & \\ & & & \vdots & & \end{bmatrix} \end{array}.$$

Рис. 3.6. Структура матрицы ДЭФ

Пример 3.4. Пусть период $N = 4$. Записать матрицу $\mathbf{V}$ в виде числовых значений.

Решение. Матрица $\mathbf{V}$ имеет вид

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^4 & W^6 \\ W^0 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix}. \qquad (3.15)$$

Подставив в матрицу (3.15) числовые значения степенного ряда W^{kn}, получим

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}. \qquad (3.16)$$

На рис. 3.7 показаны положения вектора ДЭФ и значения функции на комплексной плоскости, соответствующие матрице (3.16).

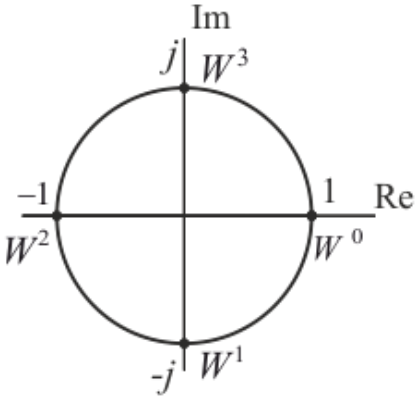


Рис. 3.7. Положения вектора ДЭФ

Свойства функций ДЭФ:

1. *Периодичность*. Рассмотрим функцию ДЭФ вида

$$W^{kn+lN} = W^{kn} \cdot W^{lN}, \qquad (3.17)$$

где l – любое целое число;

N – период.

Составляющая W^{lN} функции равна единице:

$$W^{lN} = \cos\left(\frac{2\pi}{N} lN\right) - j\sin\left(\frac{2\pi}{N} lN\right) = \cos(2\pi l) - j\sin(2\pi l) = 1.$$

Фунция ДЭФ $W^{kn+lN} = W^{kn}$ отвечает свойству периодичности (1.6).

Используя (3.17), матрицу (3.15) можно упростить, если вычисления производить по формуле

$$W^{(kn+lN) \bmod N} = W^{kn}.$$

Матрица с минимальными фазами примера 3.4 примет вид

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^0 & W^2 \\ W^0 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix}. \qquad (3.18)$$

2. *Ортогональность.* Так как $(W^{kn})^* = W^{-kn}$, то функции $\mathrm{def}(k,n)$ ортогональны, т. е.

$$\sum_{n=0}^{N-1} W^{kn}(W^{ln})^* = \begin{cases} 0, \text{если } k \neq l, \\ N, \text{если } k = l. \end{cases} \qquad (3.19)$$

Следствием свойства ортогональности является:

– скалярное произведение различных двух строк матрицы $\mathbf{V}$, одна из которых должна быть комплексно-сопряженной, равно нулю;

– скалярное произведение одинаковых двух строк матрицы $\mathbf{V}$, одна из которых должна быть комплексно-сопряженной, равно N.

Действительно,

$$W^{kn}(W^{kn})^* = e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = 1.$$

Сумма N единиц в (3.19) даст число N. Матричная запись свойства ортогональности имеет вид

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^* = N\mathbf{I}, \qquad (3.20)$$

где $\mathbf{I}$ – единичная матрица.

3. *Симметричность.* ДЭФ является функцией двух переменных k и n. Выводы относительно одной из переменных справедливы и для другой. Тогда

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}^T.$$

Замечание 3.2. Использование свойств функций $\mathrm{def}(k,n)$ и других ДЭФ-подобных функций позволяет уменьшить вычислительную сложность обработки сигнала.

3.3. Алгоритм дискретного преобразования Фурье

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ) устанавливает связь между временным и частотным представлением сигнала при разложении его по конечным дискретным экспоненциальным функциям [9]. Прямое дискретное преобразование Фурье (ПДПФ) последовательности $x(n)$ определяет дискретную последовательность $X(k)$ в частотной области:

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi kn}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{kn}, k = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.21)$$

где k – индекс ДПФ в частотной области.

Отдельное значение $X(k)$ есть сумма почленных произведений входной последовательности отсчетов на косинусоиду и синусоиду, частота которых такова, что на интервале наблюдения из N отсчетов укладывается k их полных периодов. В алгебраической форме выражение (3.21) имеет вид

$$X(k) = \mathrm{Re}(X(k)) + j\mathrm{Im}(X(k)). \quad (3.22)$$

В тригонометрическом виде ДПФ записывается как

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)(\cos\frac{2\pi}{N}nk - j\sin\frac{2\pi}{N}nk)), k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.23)$$

В показательной форме ДПФ имеет вид

$$X(k) = |X(k)| e^{j\arg(X(k))}, \quad (3.24)$$

где $|X(k)|$ – коэффициенты амплитудного спектра Фурье, которые определяются по формуле

$$|X(k)| = \sqrt{\mathrm{Re}(X(k))^2 + \mathrm{Im}(X(k))^2}, \; k = 0, 1, \dots, N-1. \quad (3.25)$$

Амплитуды гармоник – это значения комплексного спектра, отображаемые модулем комплексных чисел $X(k)$.

Фазовая характеристика ДПФ определяется выражением

$$\varphi(k) = \arg X(k) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(X(k))}{\mathrm{Re}(X(k))}\right). \quad (3.26)$$

Обратное ДПФ (ОДПФ) имеет вид

$$x(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)e^{j\frac{2\pi kn}{N}} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k)W^{-kn}, n = 0, 1, \dots, N-1, \quad (3.27)$$

где $W^{-kn} = (W^{kn})^*$.

Матричная форма ДПФ. Прямое ДПФ:

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{x}, \quad (3.28)$$

где $\mathbf{X} = (\mathrm{X}(0), \mathrm{X}(1), \dots, \mathrm{X}(N-1))^T$ и $\mathbf{x} = (x(0), x(0), \dots, x(N-1))^T$ – векторы-столбцы отсчетов спектральных коэффициентов и сигнала соответственно.

Обратное ДПФ в матричной форме:

$$\mathbf{x} = \mathbf{V}^{-1}\mathbf{X},$$

где $\mathbf{V}^{-1}$– обратная матрица. По определению $\mathbf{V} \cdot \mathbf{V}^{-1} = \mathbf{I}$.

Из свойства ортогональности $\mathrm{def}(k, n)$ (3.20)

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^* = N\mathbf{I}.$$

Умножим обе части этого равенства слева на $\mathbf{V}^{-1}$:

$$\mathbf{V}^{-1}\mathbf{V}\mathbf{V}^* = \mathbf{V}^{-1}N\mathbf{I},$$
$$\mathbf{V}^{-1} = \frac{1}{N}\mathbf{V}^*.$$

Обратное ДПФ:

$$\mathbf{x} = \frac{1}{N}\mathbf{V}^*\mathbf{X}. \quad (3.29)$$

Рассмотрим **особенности вычисления аргумента ДПФ**.

При необходимости представления аргумента ДПФ в полярной системе координат (3.26), что важно для многих современных систем передачи информации, часто появляются ситуации неоднозначности из-за неопределенности арктангенса. Рассмотрим расчет фаз гармоник разложения Фурье как комплексной функции.

1. Любое комплексное число выражается точкой на комплексной плоскости. В случае с ДПФ координаты точки определяются значениями $\mathrm{Re}(X(k))$ и $\mathrm{Im}(X(k))$ (см. рис. 3.4). Формула (3.26) дает другое представление комплексного числа – в виде вектора. Компоненты $\mathrm{Re}(X(k))$ и $\mathrm{Im}(X(k))$ являются проекциями этого вектора на оси координат. При определении фазы $\varphi(k)$ каждой гармоники

комплексного спектра $X(k)$ по формуле (3.28) возможны неправильные оценки $\varphi(k)$.

В зависимости от знаков $\mathrm{Re}(X(k))$ и $\mathrm{Im}\,X((k))$ вектор может находиться в одной из четвертей комплексной плоскости (см. рис. 3.4). Например, если отношение $\left(\frac{\mathrm{Im}(X(k))}{\mathrm{Re}(X(k))}\right) > 0$, то значение фазы комплексного $X(k)$ равно

$$\varphi(k) = \arg(X(k)) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(X(k))}{\mathrm{Re}(X(k))}\right).$$

Для третьей четверти комплексной плоскости, когда проекции $\mathrm{Re}(X(k))$ и $\mathrm{Im}(X(k))$ выражаются отрицательными величинами, фаза вновь вычисляется по (3.26) и равна $\varphi(k)$, что не соответствует истинному положению точки (вектора) на комплексной плоскости. Правильное значение фазы равно $\varphi(k) - \pi$. Для функции $\varphi(k) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(X(k))}{\mathrm{Re}(X(k))}\right)$ нет различий между первой и третьей четвертями комплексной плоскости. Подобная ситуация оценки $\varphi(k)$ возникает для второй и четвертой четвертей. Необходима поправка угла $\varphi(k)$. Связь угла $\varphi(k)$ с действительной и мнимой частями комплексного числа, представленного в алгебраической форме, записывается как

$$\left(\frac{\mathrm{Im}(X(k))}{\mathrm{Re}(X(k))}\right) = \left(\frac{|X(k)|\sin\varphi(k)}{|X(k)|\cos\varphi(k)}\right) = \mathrm{arctg}\varphi(k).$$

Напомним, функция $\mathrm{arctg\,t}(\varphi)$ определена на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Функция периодически повторяется с периодом π, т. е. $\mathrm{arctg}\varphi = \mathrm{arctg}(\varphi + \pi)$. График функции имеет вид восходящей линии. Тогда правильные значения функции $\varphi(k) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(X(k))}{\mathrm{Re}(X(k))}\right)$ получаются только на интервале $(-\pi/2, \pi/2)$. Таким образом, фазовый угол для третьей четверти должен вычисляться по формуле

$$\varphi(k) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(X(k))}{\mathrm{Re}(X(k))}\right) - \pi.$$

Введение поправки в (3.26) можно предствить выражением

$$\varphi(k) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Im}(X(k))}{\mathrm{Re}(X(k))}\right) + \theta,$$

где $\theta = \begin{pmatrix} 0, \text{ если } \mathrm{Re}(X(k)) > 0, \ \mathrm{Im}(X(k)) > 0, \\ \pi, \text{ если } \mathrm{Re}(X(k)) < 0, \ \mathrm{Im}(X(k)) > 0, \\ -\pi, \text{ если } \mathrm{Re}(X(k)) < 0, \ \mathrm{Im}(X(k)) < 0, \\ 0, \text{ если } \mathrm{Re}(X(k)) > 0, \ \mathrm{Im}(X(k)) < 0. \end{pmatrix}$.

2. В выражении $\varphi(k) = \mathrm{arctg}\left(\dfrac{\mathrm{Im}(X(k))}{\mathrm{Re}(X(k))}\right)$, если действительный компонент $\mathrm{Re}(X(k)) = 0$, это свидетельствует о том, что фаза k-й гармоники равна $\varphi(k) = \dfrac{\pi}{2}$ или $\varphi(k) = -\dfrac{\pi}{2}$. Если $\mathrm{Re}(X(k)) = 0$, то следует определить знак мнимого компонента $\mathrm{Im}(X(k))$. Для положительной мнимой части $\mathrm{Im}(X(k))$ $\varphi(k) = \dfrac{\pi}{2}$, для отрицательной мнимой части $\mathrm{Im}(X(k))$ $\varphi(k) = -\dfrac{\pi}{2}$. По-другому практически правильное определение значения фазы можно найти, приравняв $\mathrm{Re}(X(k))$ к пренебрежимо малому ненулевому значению.

Пример 3.5. Вычислить ДПФ вектора $\mathbf{x} = (0,35; 0,35; 0,64; 1,06)^T$ в матричном виде.

Решение. По (3.28) вычисляем комплексный спектр:

$$\mathbf{X = Vx} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,35 \\ 0,35 \\ 0,64 \\ 1,06 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,4 + j0 \\ -0,29 + j0,71 \\ -0,42 + l0 \\ -0,29 - j0,71 \end{pmatrix}.$$

Амплитудные и фазовые коэффициенты ДПФ имеют следующие значения:

$$|X(k)| = (X(0), X(1), X(2), X(3)) = (2,4; 0,76; 0,42; 0,76), \qquad (3.30)$$
$$\varphi(k) = (0°;\ 112,28°;\ 0°; -112,28°).$$

Сигнал имеет постоянную составляющую $|X(0)| = 2,4$. Между первой и второй гармониками имеется фазовый сдвиг величиной $\Delta\varphi = 112,28^\circ$. График амплитудного спектра (3.25) показан на рис. 3.8.

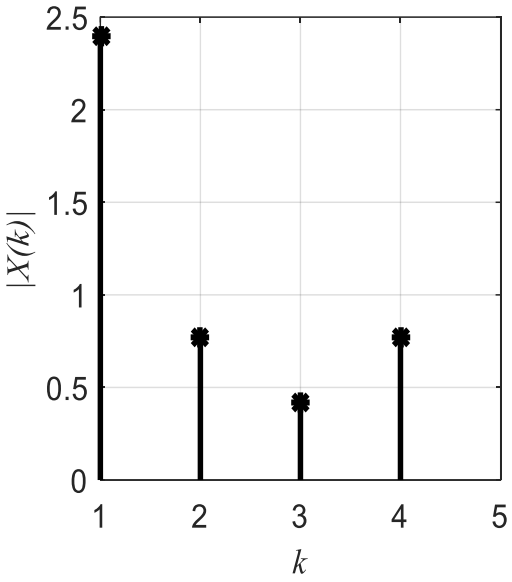


Рис. 3.8. Амплитудный спектр

Замечания:

3.3. Согласно теореме дискретизации (см. подразд. 1.4) полное восстановление сигнала возможно, когда процедура дискретизации удовлевлетворяет условию (1.13)

$$f_d = \frac{1}{T_d} \geq 2W .$$

Следовательно, минимальное число дискретных отсчетов на периоде аналогового сигнала должно быть равным двум. Дискретные отсчеты во временной области описываются в частотной области двумя реальными спектральными компонентами на частотах $k = 1,\ k = 2$ и постоянной составляющей на $k = 0$. Коэффициент $X(3) = X(1)^*$ отражает понятие «отрицательная» частота (см. рис. 3.3) и не содержит информации о частотных свойствах сигнала.

3.4. Математические расчеты и графики выполнены с помощью прикладного математического пакета MatLab. Особенностью представления графического материала в этом приложении является то, что нумерация частотных индексов k начинается с единицы. Фазовый спектр вычисляется по формуле

$$\varphi(k) = -\arg X(k) = -\mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}(X(k))}{\mathrm{Re}(X(k))}, \qquad (3.31)$$

что связано с определением в MatLab ряда Фурье в «косинусной» форме:

$$x(t) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos(k\omega_0 t - \varphi_k).$$

3.4. Свойства алгоритма дискретного преобразования Фурье

1. *Свойство периодичности ДПФ.* Периодичность ДПФ вытекает из свойства периодичности ДЭФ (3.17), когда $W^{lN\pm k} = W^{\pm k}$. Если l – любое целое число, N – период, то

$$X\left(lN \pm k\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{(lN\pm k)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W^{\pm kn} = X(\pm k).$$

Свойство периодичности справедливо и для обратного ДПФ:

$$x\left(lN \pm n\right) = x(\pm n).$$

Обычно рассматривается один период длиной N во временной и в частотной области. Это позволяет определить матричную форму записи ДПФ.

2. *Линейность ДПФ.* Пусть $x_1(n)$ и $x_2(n)$ входные последовательности, а $X_1(k)$ и $X_2(k)$, соответственно, их ДПФ. При подаче на вход линейной системы последовательности $x(n) = ax_1(n) + bx_2(n)$ на выходе формируется спектр (см. подразд. 2.1) вида

$$X(k) = aX_1(k) + bX_2(k),$$

где a и b – произвольные постоянные параметры (константы).

3. *Инвариантность ДПФ относительно циклического сдвига по времени.* Рассмотрим две последовательности $x(n)$ и $x_1\left(n\right) = x(n-h), h = 2.$ Формы последовательностей показаны на рис. 3.9. и 3.10. Последовательность $x_1\left(n\right)$ задержена на два интервала дискретизации $(h = 2)$, т. е. $x_1\left(n\right)$ сдвинута по времени на право. Найдем выражение ДПФ последовательности $x_1\left(n\right)$, если определено ДПФ $X(k)$ последовательности $x(n)$.

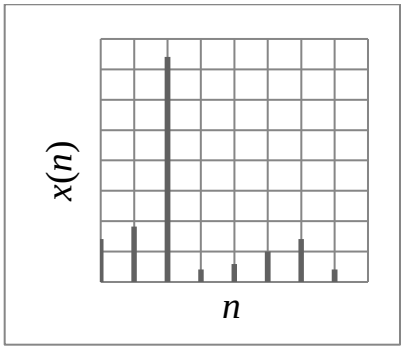


Рис. 3.9. Последовательность $x(n)$

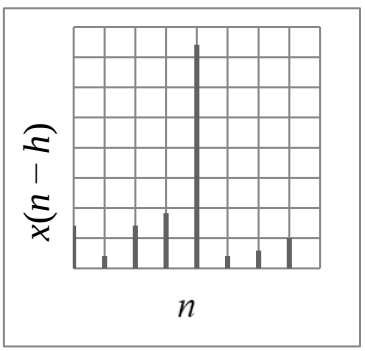


Рис. 3.10. Последовательность $x_1\left(n\right)$

Заменяем индекс суммирования n в формуле ДПФ на новую переменную $l = n - h$. Выражение ДПФ (3.21) для $x_1(n) = x(n-h)$ примет вид

$$X_{-h}(k) = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) W^{k(l+h)} = \sum_{l=0}^{N-1} x(l) W^{k(l)} W^{kh} = W^{kh}(X(k)). \qquad (3.32)$$

Для положительного сдвига $x_1(n) = x(n+h)$ ДПФ выполняется как

$$X_{+h}(k) = W^{-kh}(X(k)).$$

Вывод. При сдвиге дискретного сигнала по времени изменениям подвергаются только фазы дискретных функций (фазовый спектр), амплитудный спектр не изменяется.

3.4.1. Теорема о свертке

К свойству ДПФ относится свойство, определяемое как теорема о свертке. Свойство имеет важное прикладное значение, поскольку позволяет сократить вычислительные затраты обработки сигнала для многих приложений. Периодическая свертка описывается формулой (2.13)

$$y(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h(n-m)_{\mathrm{mod}(N)}, n = 0,\ 1,\ ...,\ N-1.$$

Вычислим ДПФ свертки $y(n)$:

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) W^{kn},\ k = 0,\ 1,\ ...,\ N-1. \qquad (3.33)$$

Подставим в (3.33) формулу свертки (2.13):

$$Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} x(m) h(n-m)_{\mathrm{mod}(N)} W^{kn},\ k = 0,\ 1,\ ...\ ,\ N-1. \qquad (3.34)$$

Так как $x(m)$ не зависит от n, изменяем порядок суммирования в (3.34):

$$Y(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m) \sum_{n=0}^{N-1} h(n-m)_{\mathrm{mod}(N)} W^{kn},\ k = 0,\ 1,\ ...,N-1. \qquad (3.35)$$

На основе свойства инвариантности ДПФ относительно циклического сдвига по времени (3.32) составляющая второй суммы выражения (3.35) равна

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(n-m)_{\mathrm{mod}(N)} W^{kn} = W^{km} H(k).$$

Выражение (3.35) запишется в виде

$$Y(k) = \left(\sum_{m=0}^{N-1} x(m) W^{km} \right) H(k) = X(k) H(k), k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1. \qquad (3.36)$$

Теорема о свертке определяет спектр свертки $Y(k)$ как произведение (3.36) спектров исходных последовательностей.

Коэффициенты свертки вычисляются на основе ОДПФ по формуле

$$y(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} Y(k) W^{-kn},\ n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1. \qquad (3.37)$$

Вывод. Теорема о свертке позволяет вычислить коэффициенты свертки при помощи ДПФ согласно выражению

$$\mathrm{y}(n) = \text{ДПФ}_y{}^{-1}\{\text{ДПФ}_x \cdot \text{ДПФ}_h\}. \qquad (3.38)$$

Замечание 3.5. При больших величинах N и повышенных требованиях по скорости обработки сигнала на практике применяют эффективные алгоритмы вычисления свертки с использованием быстрого преобразования Фурье (БПФ). Алгоритм БПФ основывается на свойствах алгоритма ДПФ.

Пример 3.6. Вычислить свертку векторов $\mathbf{x} = (1,1,1,-1)^T$ и $\mathbf{h} = (-1,1,1,1)^T$, используя теорему о свертке.

Решение. 1. Находим в матричной форме ДПФ (3.28) исходных данных. Воспользуемся матрицей $\mathbf{V}$ из примера 3.4:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Vx},\ \mathbf{H} = \mathbf{Vy},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2j \\ 2 \\ 2j \end{pmatrix},\ \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Вычисляем поэлементное умножение спектров (3.36) для нахождения спектра свертки:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{XH} = \left(4, 4j, -4, -4j\right)^T.$$

3. Выполняем ОДПФ (3.29) от спектра свертки:

$$\mathbf{y} = \frac{1}{N}\mathbf{V}^*\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{V}^*$ – матрица, комплексно-сопряженная матрице $\mathbf{V}$.

Очевидно, коэффициенты свертки $\mathbf{y}$ совпадают со значениями коэффициентов, вычисленными по определению операции свертки во временной области (см. подразд. 2.6 (пример 2.5)).

3.4.2. Теорема о корреляции

К свойству ДПФ относится свойство, определяемое как теорема о корреляции. Свойство имеет важное прикладное значение. Многие быстрые алгоритмы обработки сигнала основаны на этом свойстве. По аналогии со сверткой рассмотрим ненормированную ВКФ (см. подразд. 2.4), т. е. без учета коэффициента $\frac{1}{N}$:

$$r(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n+m)_{\mathrm{mod}(N)},\ n = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

Вычислим ДПФ корреляционной функция $r(n)$:

$$R(k) = \sum_{n=0}^{N-1} r(n)W^{kn},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1,$$

$$R(k) = \sum_{n=0}^{N-1}\sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(m+n)W^{kn},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1. \qquad (3.39)$$

Так как $x(m)$ не зависит от n, изменяем порядок суммирования в (3.39):

$$R(k) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)\sum_{n=0}^{N-1} h(m+n)W^{kn},\ k = 0,\ 1\ ,\ \ldots,\ N-1. \qquad (3.40)$$

Используя свойство инвариантности относительно циклического сдвига по времени (3.32), запишем составляющую выражения (3.40):

$$\sum_{n=0}^{N-1} h(m+n)W^{kn} = W^{-km}H(k). \qquad (3.41)$$

С учетом (3.41) выражение (3.40) приведем к виду

$$R(k) = \left(\sum_{m=0}^{N-1} x(m)W^{-km} \right) H(k) = X^*(k)H(k),\ k = 0,\ 1,\ ...,\ N-1. \qquad (3.42)$$

Спектр ВКФ равен произведению спектров коррелируемых последовательностей, причем один из спектров берется в комплексном сопряжении. Коэффициенты корреляционной функции вычисляются на основе ОДПФ по формуле

$$r(n) = \sum_{k=0}^{N-1} R(k)W^{-kn},\ k = 0,\ 1,\ ...,\ N-1. \qquad (3.43)$$

Теорема о корреляции (3.43) позволяет вычислить коэффициенты $r(n)$ при помощи ДПФ по формуле

$$r(n) = \text{ДПФ}_r^{-1}(\text{ДПФ}_x^* \cdot \text{ДПФ}_h).$$

Замечание 3.6. При больших величинах N и повышенных требованиях по скорости обработки сигнала на практике применяют эффективные алгоритмы вычисления корреляции с использованием БПФ.

Пример 3.7. Вычислить ВКФ последовательностей $x(n) = (1,1,1,-1)^T$ и $h(n) = (-1,1,1,1)^T$, используя теорему о корреляции.

Решение. 1. Находим в матричной форме ДПФ последовательностей $x(n)$ и $h(n)$. Воспользуемся матрицей $\mathbf{V}$ из примера 3.4:

$$\mathbf{X} = \mathbf{Vx},\ \mathbf{H} = \mathbf{Vh},$$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2j \\ 2 \\ 2j \end{pmatrix},\ \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. Выполняем поэлементное умножение спектров (3.42) для нахождения спектра корреляции. При этом следует записать вектор $\mathbf{X}$ в комплексном сопряжении:

$$\mathbf{R} = \mathbf{X}^*\mathbf{H} = \left(4, -4j, -4, 4j\right)^T.$$

3. Выполняем ОДПФ (3.29) от спектра $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{N}\mathbf{V}^*\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

где $\mathbf{V}^*$ – матрица, комплексно-сопряженная матрице $\mathbf{V}$.

В нормированном виде $\mathbf{r} = \left(0,1,0,0\right)^T$ (рис. 3.11).

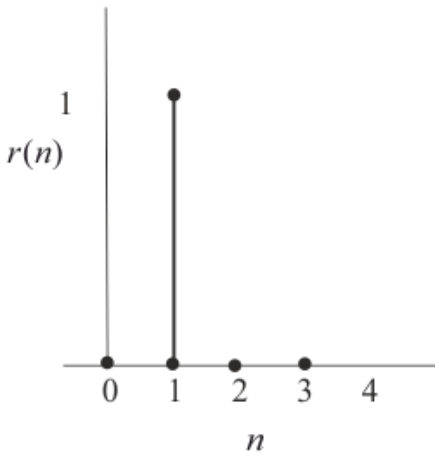


Рис. 3.11. График корреляционной функции

Очевидно, коэффициены корреляционной функции $\mathbf{r}$ совпадают со значениями коэффициентов, вычисленными по определению операции корреляция во временной области (см. подразд. 2.7 (пример 2.7)).

3.4.3. Теорема Парсеваля

Теорема Парсеваля (Марк-Антуан Парсеваль – французский математик (1755–1836)) имеет важное значение в теории передачи информации, теории преобразований, теории эффективного кодирования (сжатия) информации посредством дискретных ортогональных преобразований, ЦОС и др.

Пусть последовательности $x(n)$ и $h(n)$ будут идентичными. В этом случае теорема о корреляции записывается в виде

$$\mathbf{R} = \mathbf{X}^*\mathbf{X} = \left|\mathbf{X}\right|^2 = \left|X(k)\right|^2,\ k = 0,\ 1,\ ...,\ N-1.$$

Коэффициенты корреляционной функции вычисляются с помощью ОДПФ (3.43):

$$r(n) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} R(k)W^{-kn} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2 W^{-kn},\ k = 0,\ 1,\ ...,\ N-1. \qquad (3.44)$$

Для $n = 0$ выражение (3.44) будет иметь вид

$$r(0) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} R(k) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left|X(k)\right|^2 =$$

$$= \frac{1}{N}\left(\left|X(0)\right|^2 + \left|X(1)\right|^2 + ... + \left|X(N-1)\right|^2\right). \qquad (3.45)$$

Выражение отражает понятие энергии сигнала в частотной области. Каждая величина $\left|X(k)\right|^2,\ k = 0,\ 1,\ ...\ , N-1$ представляет собой мощность дискретной гармоники, имеющей частоту с номером k.

Далее воспользуемся выражением ненормированной ВКФ (2.13) для случая $x(n) = h(n)$:

$$r(n) = \sum_{m=0}^{N-1} x(m)h(n+m) = \sum_{m=0}^{N-1}\left|x(m)\right|^2,\ n = 0,\ 1,\ ...,\ N-1.$$

В частном случае для $n = 0$ и $m = 0$ равенство сводится к соотношению

$$r(0) = \sum_{m=0}^{N-1}\left|x(m)\right|^2 = r(0) = \left|x(0)\right|^2 + \left|x(1)\right|^2 + ... + \left|x(N-1)\right|^2. \qquad (3.46)$$

Приравнивая (3.45) и (3.46), получаем выражение теоремы Парсеваля:

$$\left|x(0)\right|^2 + \left|x(1)\right|^2 + ... + \left|x(N-1)\right|^2 = \frac{1}{N}\left(\left|X(0)\right|^2 + \left|X(1)\right|^2 + ... + \left|X(N-1)\right|^2\right). \qquad (3.47)$$

Вывод. Энергия сигнала, вычисленная во временной области (по переменной $n = 0$), равна энергии сигнала, вычисленной в частотной области (по переменной $k = 0$).

Пример 3.8. Подтвердить теорему Парсеваля, если $x(n) = (1,1,1,-1)$.

Решение. По формуле (3.46) находим во временной области $r(0) = 4$. В примере 3.7 для заданной последовательности получен спектр

$$\mathbf{X} = (2, -2j, -2, 2j)^T.$$

По формуле (3.45) находим в частотной области $r(0) = 4$, что и подтверждает теорему Парсеваля.

3.5. Разрешение по частоте в дискретном спектральном анализе

Спектральный анализ находит применение для решения задач в научных исследованиях, авиации, космонавтике, транспорте, строительстве, идентификационных системах, биомедицине и во многих других приложениях. Любой сигнал как функцию времени математически можно представить зависимостью амплитуды от частоты и зависимостью фазы от частоты, т. е. амплитудным и фазовым спектрами. Амплитудный и фазовый спектры часто дают больше полезной информации, чем форма сигнала. С помощью анализа Фурье сигналы представляются суммой гармонических (синусоидальных) сигналов, каждый из которых характеризуется своей частотой, амплитудой и начальной фазой. Говорят, спектр дает информацию о частотном содержании сигнала. Одной из точностных характеристик спектрального анализа является разрешение по частоте. Ниже рассматривается это понятие относительно дискретного спектрального анализа.

Определение 3.4. Расстояние между соседними гармониками спектра называется разрешением по частоте.

В общем случае величина разрешения определяется параметром частоты основной гармоники:

$$\Delta\omega = \omega_0\,(\text{рад/с}),\ \Delta f = f_0\,(\text{Гц}).$$

Напомним, частоты синусоидальных составляющих спектра периодического сигнала кратны основной (первой) гармонике:

$$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T},$$

где T – период сигнала.

Для дискретной последовательности $x(n)$ с числом отсчетов N и периодом T частота первой гармоники зависит от величины частоты дискретизации. Частота дискретизации (см. подразд. 1.4)

$$\omega_d = 2\pi f_d = \frac{2\pi}{T_d},$$

где T_d – временной интервал дискретизации.

Разрешение по частоте (рад/с) определяется как

$$\Delta\omega = \omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{NT_d}(\text{рад/с}). \qquad (3.48)$$

Разрешение по частоте в герцах находится из выражения

$$\Delta f = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{2\pi}{2\pi NT_d} = \frac{1}{NT_d} = \frac{f_d}{N}\,(\text{Гц}). \qquad (3.49)$$

Таким образом, чем длительнее сигнал, тем большим будет разрешение спектральных составляющих.

3.6. Спектральный анализ фрагмента речевого сигнала

Ставится задача выполнить N-точечный спектральный анализ фрагмента речевого сигнала, показанного на рис. 3.12. Исходные параметры дискретизации: $f_d = \frac{1}{T_d} = 8000$ Гц (T_d=125 мкс), $N = 8$.

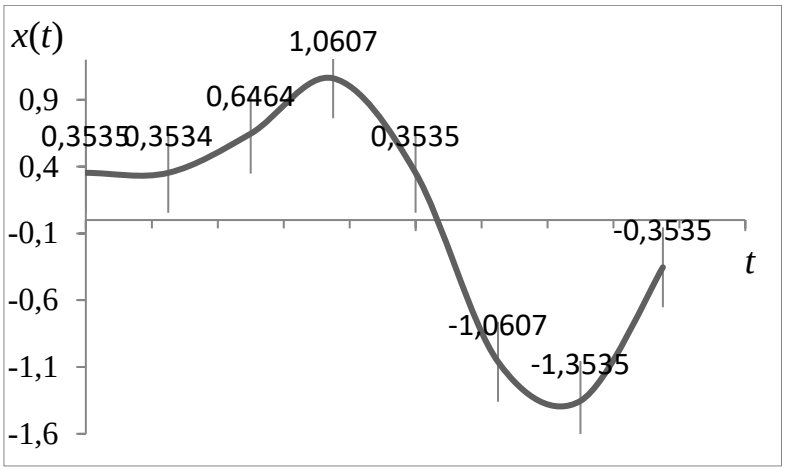


Рис. 3.12. Фрагмент речевого сигнала

После дискретизации $x(t)$ получена дискретная вещественная последовательность

$$x(n) = (0{,}35;\ 0{,}35;\ 0{,}64;\ 1{,}06;\ 0{,}35;\ -1{,}06;\ -1{,}35;\ -0{,}35).$$

ДПФ определяет спектральный состав фрагмента речи в восьми точках частотной оси. В общем случае N разных частот анализа ДПФ определяется выражением (3.49):

$$k\Delta f = \frac{kf_d}{N},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ N-1.$$

Коэффициент $k = 1$ задает значение частоты основной гармоники f_0:

$$f_0 = \frac{kf_d}{N} = 1000\ \text{Гц}.$$

Коэффициент $X(0)$ характеризует амплитуду составляющей входного сигнала, имеющей частоту 0 Гц (постоянную составляющую сигнала). Воспользуемся тригонометрической формой (3.23) записи ДПФ:

$$X(0) = \sum_{n=0}^{7} x(n)(\cos\frac{\pi}{8}n0 - jx(n)\sin\frac{2\pi}{8}n0) = \sum_{n=0}^{7} x(n) = 0.$$

В алгебраической форме $X(k)$ составляющая сигнала равна (3.22)

$$X(0) = \mathrm{Re}(X(0)) + j\mathrm{Im}(X(0)) = 0{,}0 + j0{,}0.$$

Фазовый сдиг (3.26)

$$\varphi(0) = \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}(X(0))}{\mathrm{Re}(X(0))},\ \ \varphi(0) = 0\ .$$

Коэффициент $X(1)$ $(k = 1)$ задает амплитуду основной гармоники:

$$X(1) = \sum_{n=0}^{7} x(n)\ (\cos\frac{\pi}{8}n1 - jx(n)\sin\frac{2\pi}{8}n1) = 0{,}0 - j4{,}0,$$
$$|X(1)| = 4.$$

Фазовый угол основной гармоники

$$\varphi(1) = \ \mathrm{arctg}\frac{\mathrm{Im}(X(1))}{\mathrm{Re}(X(1))} = \mathrm{arctg}\left(-\frac{4}{0}\right) = -\frac{\pi}{2}.$$

Вывод. Как видно из расчетов, отдельное значение $X(k)$ есть сумма почленных произведений отсчетов входной последовательности на косинусоиду и синусоиду, частота которых такова, что на интервале наблюдения из N отсчетов укладывается k их полных периодов. В нашем примере для $k = 1$ на интервале наблюдения из восьми отсчетов укладывается один период синусоиды/косинусоиды (самая низкочастотная компонента). Для $k = 2$ на интервале из восьми отсчетов укладывается два периода синусоиды и т. д., при этом независимо от величины N и того, какова частота дискретизации f_d.

Продолжая вычисления, получаем

$$X(2) = \sum_{n=0}^{7} x(n)\left(\cos\frac{2\pi}{8}2n - jx(n)\sin\frac{2\pi}{8}2n\right) = 1{,}414 + j1{,}41,$$

$$|X(2)| = \sqrt{\sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2.$$

Фазовый угол второй гармоники

$$\varphi(2) = \operatorname{arctg}\frac{1{,}414}{1{,}414} = \operatorname{arctg}1 = \frac{\pi}{4}.$$

Аналогично вычисляются остальные коэффициенты ДПФ:

$$X(3) = 0{,}0 - j0{,}0,$$
$$X(4) = 0{,}0 - j0{,}0,$$
$$X(5) = 0{,}0 - j0{,}0,$$
$$X(6) = 1{,}414 - j1{,}414,\ |X(6)| = 2,$$
$$\varphi(6) = \operatorname{arctg}\frac{-1{,}414}{1{,}414} = \operatorname{arctg}(-1) = -\frac{\pi}{4},$$
$$X(7) = 0{,}0 + j4{,}0\ ,\ \varphi(7) = \frac{\pi}{2}.$$

На рис. 3.13 показан график амплитудного спектра $|X(k)|$ фрагмента речевого сигнала.

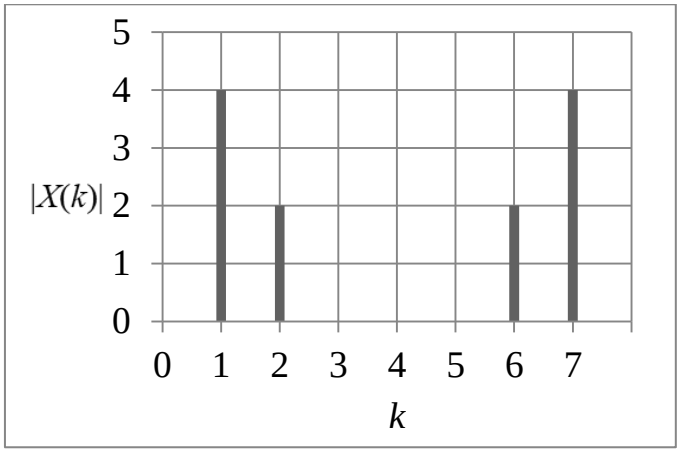


Рис. 3.13. Амплитудный спектр фрагмента речевого сигнала

Как видно, исследуемый сигнал имеет спектральные компоненты с частотами $f_1 = 1$ кГц и $f_2 = 2$ кГц. Амплитуда первой гармоники в два раза выше амплитуды второй гармоники.

На рис. 3.14 отображены фазочастотные свойства сигнала. Между первой и второй гармониками имеется фазовый сдвиг величиной $\varphi = 135° = \frac{3\pi}{4}$.

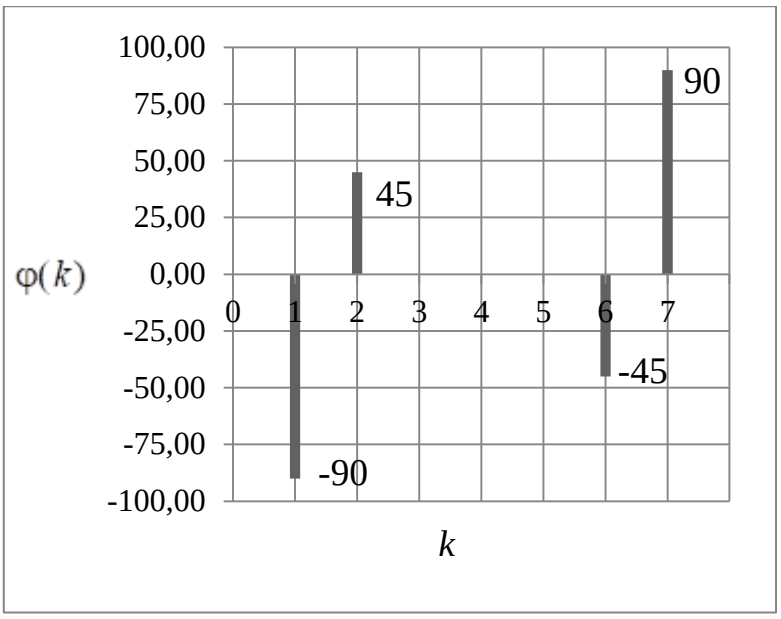


Рис. 3.14. Фазовый спектр фрагмента речевого сигнала

Замечания:

3.7. Если сигнал содержит синусоидальную компоненту с амплитудой

$$|X(k)| = A_k$$

и целым количеством периодов на N отчетах, то реальное значение амплитуды $|X(k)| = A_k$ равно

$$A_k = \frac{2|X(k)|}{N}.$$

Ранее получены значения $|X(1)| = A_1 = 4$ и $|X(2)| = A_2 = 2$. Реальные значения амплитуд первой и второй гармоник равны

$$A_1 = \frac{2 \cdot 4}{8} = 1, A_2 = \frac{2 \cdot 2}{8} = 0{,}5.$$

3.8. Если сигнал имеет постоянную составляющую A_0, то величина постоянной составляющей (среднего за период T) сигнала равна

$$A_0 = \frac{X(0)}{N}.$$

В рассмотренном анализе $A_0 = 0$, т. е. среднее значение фрагмента речевого сигнала равно нулю.

Более эффективная реализиция метода анализа речи достигается применением алгоритма БПФ. Алгоритм БПФ основывается на свойствах алгоритма ДПФ.

3.7. Синтез фрагмента речевого сигнала

Данные спектрального анализа позволяют произвести синтез сигнала.
Пусть были получены следующие значения после анализа:
– спектральные компоненты с частотами $f_1 = 1$ кГц и $f_2 = 2$ кГц;
– амплитуды компонент $A_0 = 0, A_1 = 1$ и $A_2 = 0{,}5$;
– фазовый сдвиг $\varphi = \frac{3\pi}{4}$;
– частота дискретизации $f_d = 8000$ Гц;
– интервал дискретизации $T_d = T = \frac{1}{8000}$ с.

Непрерывный сигнал формируется в виде суммы постоянной составляющей и двух гармоник:

$$x(t) = x_0 + x_1(t) + x_2(t),$$

где $x_0 = A_0 = 0$, $x_1(t) = \sin(\omega_1 t) = \sin(2\pi f_1 t) = \sin(2\pi 1000t)$.

Подставляя исходные данные в $x_2(t)$, получаем

$$x_2(t) = 0{,}5\sin(\omega_2 t + \tfrac{3\pi}{4}) = 0{,}5\sin(2\pi f_2 t + \tfrac{3\pi}{4}) = 0{,}5\sin(2\pi 2000t + \tfrac{3\pi}{4}).$$

Синтезированный сигнал описывается выражением

$$x(t) = \sin(2\pi 1000t) + 0{,}5\sin(2\pi 2000t + \tfrac{3\pi}{4}).$$

Форма непрерывного речевого сигнала $x(t)$ показана на рис. 3.15.

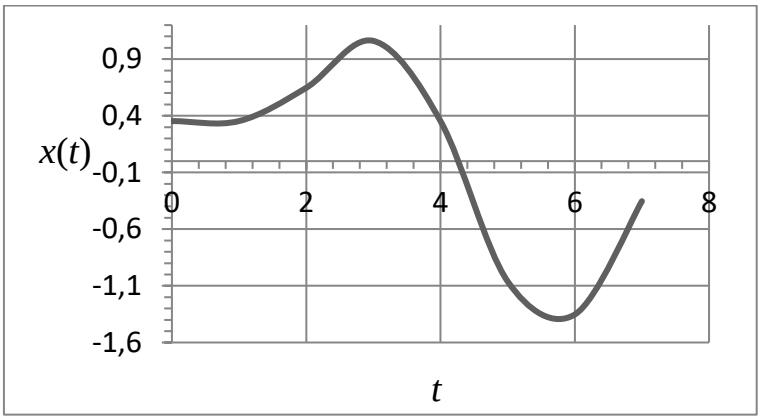


Рис. 3.15. Синтезированный сигнал

Запишем дискретную последовательность, соответствующую аналоговому сигналу. Так как

$$t = nT, n = 0{,}1, \ldots, 7, T = \frac{1}{8000}, \text{ то}$$

$$x(nT) = \sin(2\pi 1000nT) + 0{,}5\sin(2\pi 1000nT + 3\pi/4),$$

$$x(n) = \sin\left(\frac{2\pi 1000n}{8000}\right) + 0{,}5\sin\left(\frac{2\pi 1000n}{8000} + \frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= \sin\left(\frac{2\pi n}{8}\right) + 0{,}5\sin\left(\frac{4\pi n}{8} + 3\pi/4\right). \qquad (3.50)$$

Используя выражение (3.50), получаем значения отсчетов дискретного сигнала $x(n)$:

$$x(0) = \sin 0 + 0{,}5\sin\left(0 + \frac{3\pi}{4}\right) = 0{,}5\sin 135^\circ = 0{,}5\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}3535,$$

$$x(1) = \sin\frac{2\pi}{8} + 0{,}5\sin\left(\frac{4\pi}{8} + \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}5\sin\frac{10\pi}{8} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}5\sin\left(\frac{2\pi}{8} + \pi\right) =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}5(-\sin 45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{4} = 0{,}3535,$$

$$x(2) = \sin\frac{2\pi}{8}2 + 0{,}5\sin\left(\frac{8\pi}{8} + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + 0{,}5\sin\left(\pi + \frac{3\pi}{4}\right) =$$

$$= 1 - 0{,}5\frac{\sqrt{2}}{2} = 0{,}6464,$$

$$x(3) = 1{,}0607,$$

$$x(4) = 0{,}3535,$$

$$x(5) = -1{,}0607,$$

$$x(6) = -1{,}3535,$$

$$x(7) = -0{,}3535.$$

Очевидно, вычисленные значения дискретных отсчетов совпадают со значениями отсчетов дискретизированного сигнала (см. рис. 3.12).

3.8. Задания для самостоятельного выполнения

1. Вычислить значения ДЭФ: W^2, W^3, W^{-1}, W^{-3} при $N = 8$.
2. Записать функции системы ДЭФ в виде матрицы **V** размерностью 8×8.
3. Привести на примерах вычисления, подтверждающие свойства ДЭФ.
4. Вычислить спектр сигнала $x(n) = (1,1,-1,1,1,-1,-1,-1)$ с помощью ДПФ. Построить графики амплитудного и фазового спектров.
5. По полученным в задании 4 значениям ДПФ с помощью ОДПФ восстановить исходные значения отсчетов сигнала. Построить график восстановленного сигнала.
6. Привести на примерах вычисления, подтверждающие свойства ДПФ.
7. Вычислить спектр сигнала (см. задание 4), сдвинутого по времени на $t = 3T_d$ интервалов дискретизации. Построить графики сигнала, амплитудного и фазового спектров.

8. С помощью ДПФ вычислить периодическую свертку последовательностей $h(n)=(-1,-1,-1,1,1,-1,1,1)$ и $x(n)=(1,1,-1,1,1,-1,-1,-1)$. Построить график свертки.

9. С помощью ДПФ вычислить ВКФ периодических последовательностей $h(n)=(-1,-1,-1,1,1,-1,1,1)$ и $x(n)=(1,1,-1,1,1,-1,-1,-1)$. Построить график ВКФ.

10. С помощью ДПФ вычислить АКФ периодической последовательности $x(n)=(1,1,-1,1,1,-1,-1,-1)$. Построить график АКФ.

11. Используя исходные данные (см. задание 4), провести вычисления, подтверждающие теорему Парсеваля.

4. АЛГОРИТМ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Быстрый алгоритм Фурье позволяет эффективно вычислять дискретное преобразование Фурье. При этом сокращается количество выполняемых операций, а также объем памяти, необходимый для вычисления ДПФ. В результате многие прикладные задачи спектрального анализа и обработки сигналов в частотной области решаются в реальном времени.

4.1. Вычислительная сложность дискретного преобразования Фурье

Ранее по формулам (3.21) и (3.27) было определено соответственно прямое и обратное ДПФ:

$$X(k) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x(n)W^{kn}, k = 0,1,\dots,N-1,$$
$$x(n) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W^{-kn}, n = 0,1,\dots,N-1,$$

где $x(n) = (x(0),\ \dots,\ x(N-1))$ отсчеты сигнала;

$X(k) = (X(0), X(1), \dots, X(N-1)) -$ отсчеты дискретного спектра.

Можно записать ДПФ в матричной форме:

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{x},$$
$$\mathbf{x} = \mathrm{N}^{-1}\mathbf{V}^{*}\mathbf{X},$$

где $\mathbf{x} = (x(0),\ \dots,\ x(N-1))^T$; $\mathbf{X} = (X(0),\ \dots,\ X(N-1))^T$; – векторы-столбцы отсчетов сигнала и спектральных коэффициентов.

Пример 4.1. Вычислить преобразование Фурье длиной $N = 4$.

Решение. Ядро прямого преобразования имеет вид

$$\boldsymbol{V} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 & W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 & W^2 & W^3 \\ W^0 & W^2 & W^0 & W^2 \\ W^0 & W^3 & W^2 & W^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix}.$$

В общем виде прямое ДПФ вычисляется из выражения

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) + x(1) + x(2) + x(3) \\ x(0) - jx(1) - x(2) + jx(3) \\ x(0) - x(1) + x(2) - x(3) \\ x(0) + jx(1) - x(2) - jx(3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ X(2) \\ X(3) \end{bmatrix}.$$

Оценим вычислительную сложность ДПФ для комплекснозначной последовательности.

Для вычисления одного отсчета ДПФ потребуется $C_{M_K} = N$ умножений комплексных чисел и $C_{A_K} = N - 1$ сложений комплексных чисел.

Число действительных сложений. Пусть $a + jb$ и $c + jd$ комплексные числа, где $j = \sqrt{-1}$. Сумма этих чисел равна

$$(a + c) + j(b + d).$$

На каждое сложение двух комплексных чисел затрачивается два сложения действительных чисел. Так как при вычислении одного коэффициента ДПФ нужно выполнить $N - 1$ комплексных сложений, то всего затрачивается

$$C_+{}^1 = 2(N - 1)$$

сложений действительных чисел.

Для полного вычисления N коэффициентов ДПФ необходимо выполнить

$$C_+{}^N = 2(N - 1)N = 2N^2 - 2N$$

сложений действительных чисел.

Число действительных умножений. Умножение комплексных чисел равно

$$(a + jb)(c + jd) = ac + jad + jbc - bd = (ac - bd) + j(ad + bc).$$

Как видно, на каждое комплексное умножение затрачивается два сложения действительных чисел и четыре умножения действительных чисел. Тогда при вычислении одного коэффициента ДПФ по операции умножения нужно выполнить $2N$ сложения действительных чисел. Для полного вычисления N коэффициентов ДПФ по операции умножения необходимо выполнить

$$C_{+_M}{}^N = 2N^2$$

сложений действительных чисел.

Таким образом, вычислительная сложность ДПФ по действительным операциям сложениям равна

$$C_{\Sigma+}^N = C_+{}^N + C_{+_\text{м}}{}^N = (2N^2 - 2N) + 2N^2 = 4N^2 - 2N.$$

При прямом вычислении одного коэффициента ДПФ по операции умножения нужно выполнить $4N$ умножений действительных чисел. Для полного вычисления N коэффициентов ДПФ по операции умножения необходимо выполнить

$$C_\times{}^N = 4N^2$$

умножений действительных чисел.

При оценке качества вычислительного алгоритма оперируют понятием асимптотической сложности, т. е. величиной, которая получается при неограниченном увеличении размера входа N. Асимптотическая сложность определяет размер задач, которые можно решить алгоритмом. Асимптотическая сложность оценивается порядком роста функции без учета мультипликативных констант. Например, если N входных переменных обрабатывается за время cN^2, где c – некоторая постоянная, то временная сложность алгоритма – $\theta(N^2)$ (говорят: порядка N^2).

Очевидно (см. пример 4.1), сложность ДПФ оценивается как $\theta(N^2)$. Существуют другие алгоритмы вычисления ДПФ, которые снижают вычислительную сложность до $N \log_2 N$ и даже до N. Такие алгоритмы называются быстрыми.

Впервые метод быстрого преобразования Фурье (БПФ) (FFT – Fast Fourier Transform) был предложен в 1965 году Джеймсом Кули и Джоном Тьюки. Однако метод БПФ неоднократно открывался до этого. Ряд исследователей приписывают изобретение алгоритма БПФ Карлу Рунге в 1903 году и Генриху Кенигу в 1924 году. Есть утверждения о том, что быстрый алгоритм типа БПФ открыл Карл Фридрих Гаусс еще 1805 году. Важность БПФ осозналась с появлением компьютеров. Начался поиск других эффективных алгоритмов.

4.2. Быстрое преобразование Фурье по основанию два

Метод БПФ основан на том, что вычисление ДПФ n-точечной последовательности сводится к вычислению ДПФ последовательности длиной меньшей чем N. Пусть $N = 2^{\nu}, \nu \in Z^{+}$. При вычислении ДПФ методом БПФ по основанию два N n-точечная последовательность разделяется на две части, в каждой из которой $\frac{N}{2}$ отсчетов. Общее ДПФ всей N-точечной последовательности отсчетов вычисляется через ДПФ одной и другой ее частей. Каждая из выделенных $\frac{N}{2}$-точечных последовательностей в свою очередь может быть разделена на две части, в которых будет уже по $\frac{N}{4}$ отсчетов. Применяя еще раз специальные формулы, можно выразить ДПФ одной $\frac{N}{2}$-точечной последовательности через соответствующие пары $\frac{N}{4}$- точечных последовательностей. Далее, действуя подобным образом, получаем ДПФ всей исходной N-точечной последовательности как функцию ДПФ только двухточечных последовательностей.

4.2.1. Разделение последовательности на части. Прореживание по времени

Пусть задана последовательность отсчетов $x(n) = (x(0), x(1), \dots, x(7))$ (рис. 4.1).

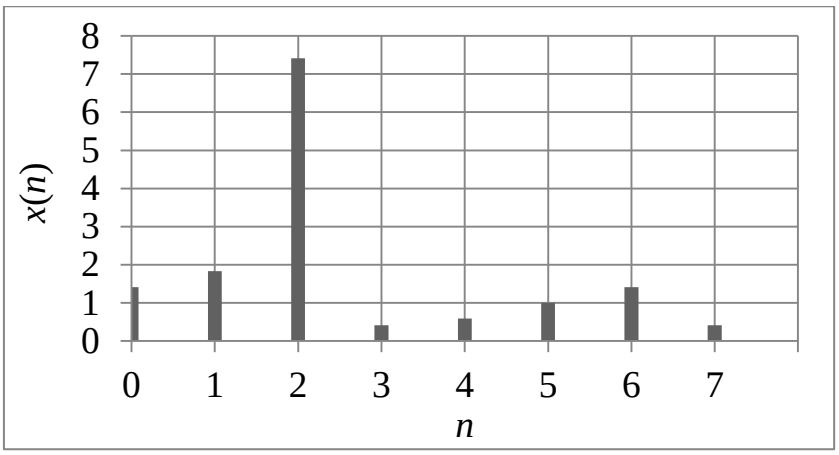


Рис. 4.1. Последовательность отсчетов

Разделим N-точечную последовательность на две части: последовательность $x_1(n) = (x(0), x(2), (4), x(6))$ с четными номерами и последовательность $x_2(n) = (x(1), x(3), (5), x(7))$ с нечетными номерами. В каждой последовательности будет $\frac{N}{2}$-отсчетов. На рис. 4.2 и 4.3 изображены эти последовательности.

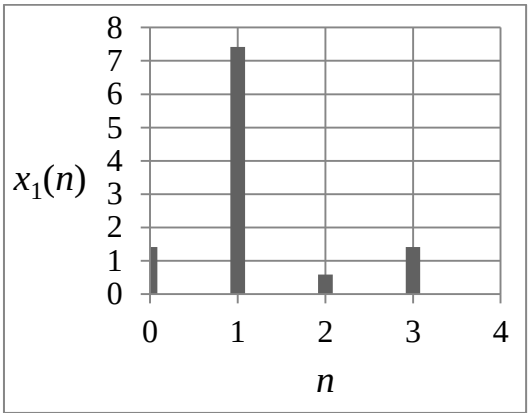


Рис. 4.2. Последовательность $x_1(n)$ четных отсчетов

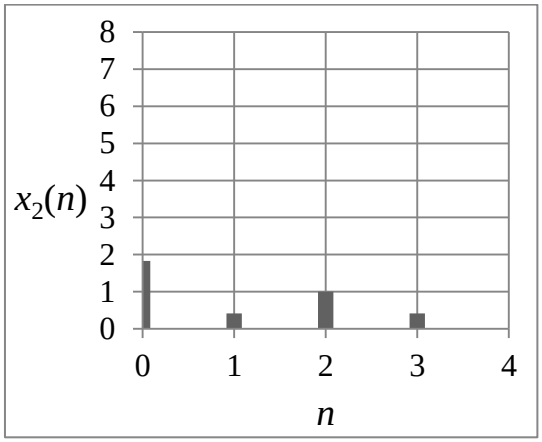


Рис. 4.3. Последовательность $x_2(n)$ нечетных отсчетов

Далее каждую $\frac{N}{2}$-точечную последовательность разделим на две части:

$x_1'(n) = (x(0), x(4))$ – последовательность четных отсчетов,
$x_2'(n) = (x(2), x(6))$ – последовательность нечетных отсчетов,
$x_1''(n) = (x(1), x(5))$ – последовательность четных отсчетов,
$x_2''(n) = (x(3), x(7))$ – последовательность нечетных отсчетов.

Изображения этих последовательностей показаны на рис. 4.4–4.7.

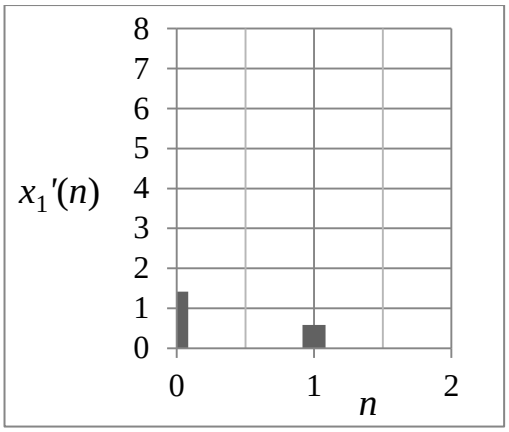


Рис. 4.4. Последовательность $x_1'(n)$

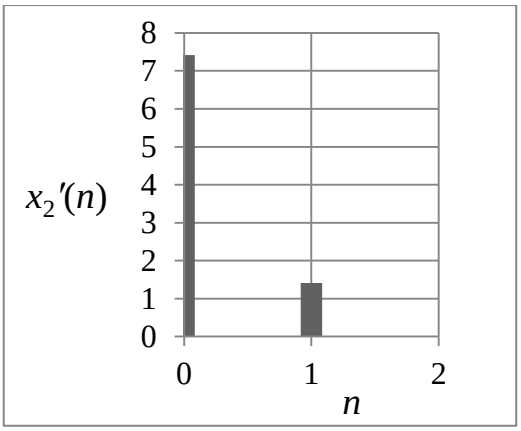


Рис. 4.5. Последовательность $x_2'(n)$

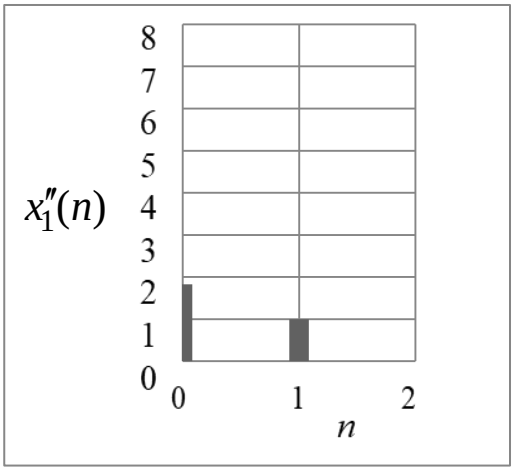


Рис. 4.6. Последовательность $x_1''(n)$

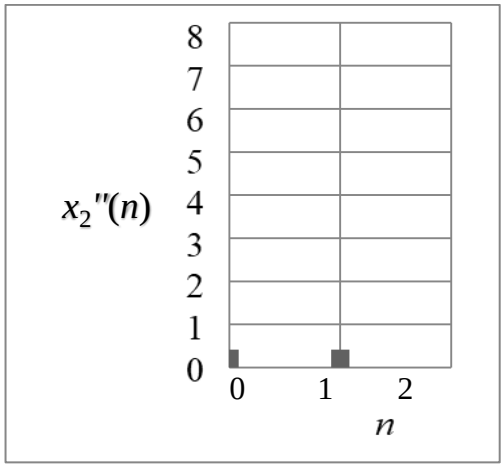


Рис. 4.7. Последовательность $x_2''(n)$

4.2.2. Алгоритм БПФ с прореживанием по времени

Разобьем последовательность $x(n) = (x(0), x(1), \ ..., \ x(N-1))$ на две последовательности. Последовательность $x_1(n) = x(2l) = (x(0), x(2) \ ..., x(N-2)), \ l = 0, \ 1, \ ..., \ \frac{N}{2} - 1$ содержит четные отсчеты. Последовательность $x_2(n) = x(2l+1) =$

$= \big(x(1), x(3), \dots, x(N-1)\big), l = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$ состоит из нечетных отсчетов. N-точечное ДПФ последовательности $x(n)$ равно

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l) W_N^{2lk} + \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1) W_N^{(2l+1)k} =$$
$$= \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l)(W_N^2)^{lk} + {W_N}^k \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1)(W_N^2)^{lk}. \qquad (4.1)$$

С учетом того, что

$$W_N^2 = \exp\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)^2 = e^{\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)} e^{\left(-j\frac{2\pi}{N}\right)} = e^{-j\frac{4\pi}{N}} = e^{-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}} = W_{\frac{N}{2}}$$

является значением поворачивающего множителя функции с периодом $\boldsymbol{\frac{N}{2}}$, запишем выражение (4.1) в виде

$$X(k) = \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l) {W_{\frac{N}{2}}}^{lk} + {W_N}^k \sum_{l=0}^{\frac{N}{2}-1} x(2l+1) {W_{\frac{N}{2}}}^{lk} = G(k) + {W_N}^k H(k), \quad (4.2)$$

где $G(k)$ и $H(k)$ – есть $\frac{N}{2}$-точечные ДПФ последовательностей с четными и нечетными номерами отсчетов.

Искомое ДПФ $X(k)$ содержит N спектральных коэффициентов. Но функции $G(k)$ и $H(k)$ содержат только $\frac{N}{2}$ коэффициентов и имеют период $\frac{N}{2}$. Для вычисления спектральных коэффициентов с номерами $k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$ можно использовать непосредственно выражение (4.2). Для вычисления спектральных коэффициентов с номерами $\frac{N}{2} \le k \le N - 1$ воспользуемся свойством периодичности преобразования Фурье (см. подразд. 3.4). Для периода $\frac{N}{2}$ свойство периодичности ДПФ записывается в виде

$$G(k) = G\left(k + \frac{N}{2}\right) \text{ и } H(k) = H\left(k + \frac{N}{2}\right).$$

Функция ДЭФ в формуле (4.2) в этом случае рассматривается как

$$W_N^{\left(k+\frac{N}{2}\right)} = W_N^k W_N^{\frac{N}{2}} = W_N^k e^{-j\frac{2\pi N}{N2}} = -W_N^k.$$

Тогда формулу (4.2) можно записать в виде двух выражений

$$X(k) = G(k) + {W_N}^k H(k), \qquad 0 \le k \le \frac{N}{2} - 1;$$

$$X(k) = G(k) - W_N{}^k H(k), \qquad \frac{N}{2} \le k \le N-1.$$

Полный спектр сигнала получается путем вычисления двух $\frac{N}{2}$-точечных ДПФ и их весовым сложением. На рис. 4.8 изображена базовая операция БПФ с прореживанием по времени. Кружок на рисунке можно интерпретировать как двухточечное ДПФ, узлы обозначают регистры, содержащие входные и выходные массивы данных.

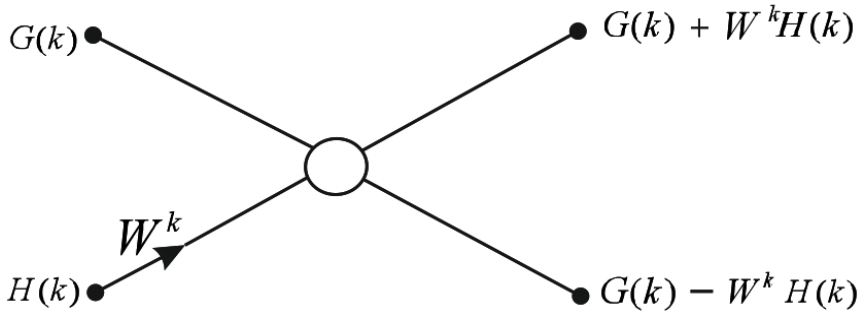


Рис. 4.8. Базовая операция БПФ

4.2.3. Структурная схема процессора для вычисления *N*-точечного ДПФ через два $\frac{N}{2}$-точечных преобразования

На рис. 4.9 показана структурная схема процессора для вычисления 8-точечного ДПФ через два 4-точечных преобразования.

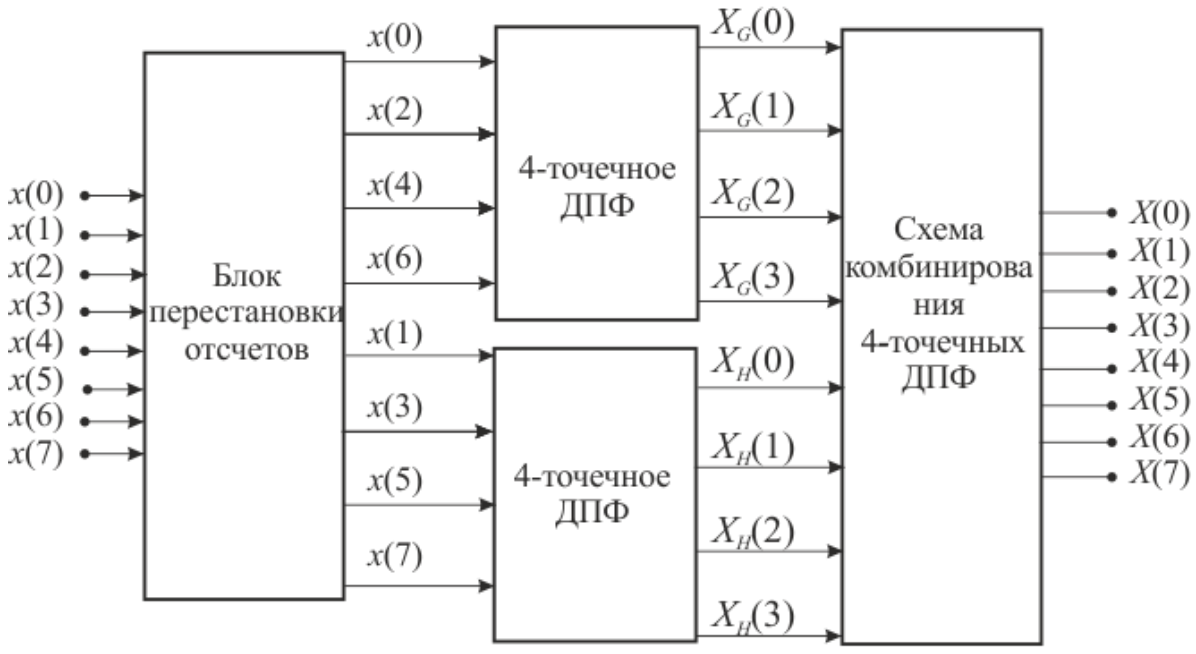


Рис. 4.9. Структурная схема БПФ процессора

Граф иллюстрирует процесс вычисления ДПФ с помощью алгоритма БПФ (рис. 4.10).

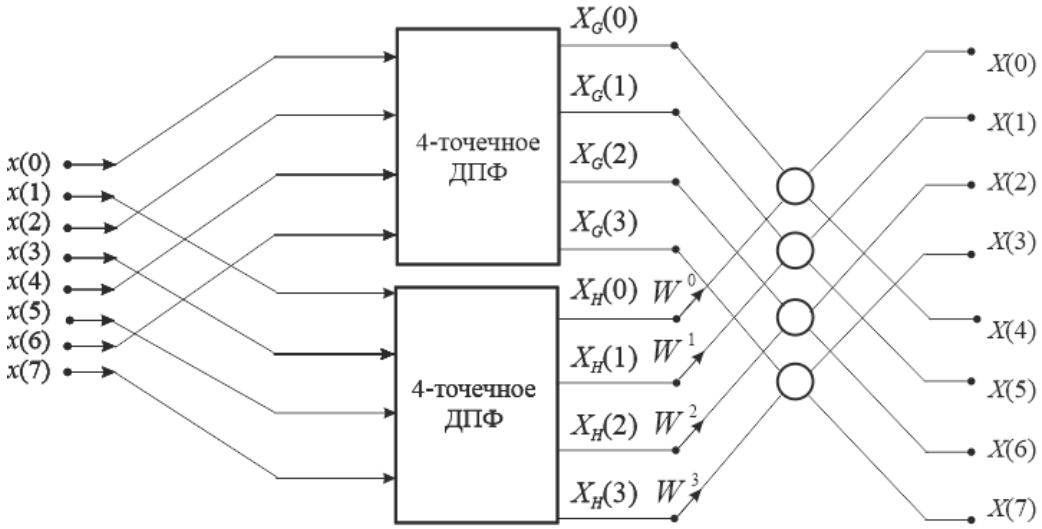


Рис. 4.10. Граф БПФ

4.2.4. Вычислительная сложность алгоритма БПФ

Для выполнения вычисления N-точечного ДПФ через два $\frac{N}{2}$-точечных преобразования требуется затратить

$$C_M'^* = 2\left(\frac{N}{2}\right)^2 = \frac{N^2}{2}$$

комплексных умножений. Операция комбинирования требует умножений на W^k, $k = 0, 1, \ldots, \frac{N}{2}$:

$$C_M''^* = \frac{N}{2}.$$

Всего необходимо выполнить

$$C_M^* = C_M'^* + C_M''^* = \frac{N^2}{2} + \frac{N}{2}$$

комплексных умножений.

Кроме того, для выполнения вычисления N-точечного ДПФ через два $\frac{N}{2}$-точечных преобразования требуется затратить

$$C_A'^* = 2\left(\frac{N}{2}\left(\frac{N}{2}-1\right)\right) = \frac{N^2}{2} - N$$

комплексных сложений. Операция комбинирования требует еще N комплексных сложений:

$$C_A''^* = N.$$

Всего необходимо выполнить

$$C_A^* = C_A'^* + C_A''^* = \frac{N^2}{2}$$

комплексных сложений.

Дальнейшее сокращение количества операций произойдет, если для вычисления $G(k) + W_N{}^k H(k)$ и $G(k) - W_N{}^k H(k)$ опять сделать прореживание по времени входных последовательностей. В этом случае вычисляется 4-точечное ДПФ через два 2-точечных ДПФ. На рис. 4.11 показана структурная схема процессора 8-точечного ДПФ на основе алгоритма БПФ.

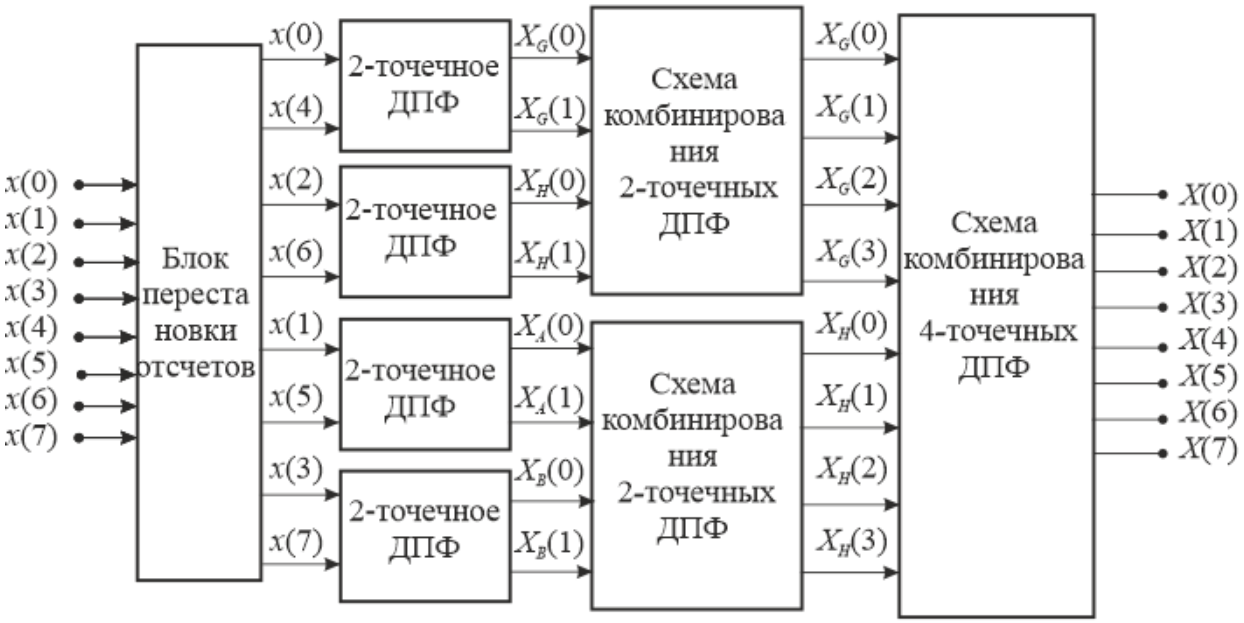


Рис. 4.11. Структурная схема процессора 8-точечного ДПФ

Вычислим 2-точечное ДПФ:

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} W^0 & W^0 \\ W^0 & W^1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) + x(1) \\ x(0) - x(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \end{bmatrix}.$$

Как видно, ДПФ 2-точечной последовательности равно сумме и разности значений отсчетов последовательности. Следовательно, вычисление 2-точечного

ДПФ не требует операций умножений. Дискретное преобразование Фурье $\frac{N}{2}$-точечной последовательности, записанное через комбинирование двух $\frac{N}{4}$-точечных ДПФ, имеет следующий вид:

$$\begin{cases} X_G(k) = G(k) + W_{\frac{N}{2}}^{k} H(k), \ 0 \le k \le \frac{N}{4} - 1, \\ X_G(k) = G(k) - W_{\frac{N}{2}}^{k} H(k), \ \frac{N}{4} \le k \le \frac{N}{2} - 1, \end{cases} \tag{4.3}$$

где $W_{\frac{N}{2}} = \exp\left(-j\frac{2\pi}{\frac{N}{2}}\right) = W_N^2$. (4.4)

С учетом (4.4) выражение (4.3) запишется как

$$\begin{cases} X_G(k) = G(k) + W_N^{2k} H(k), \ 0 \le k \le \frac{N}{4} - 1, \\ X_G(k) = G(k) - W_N^{2k} H(k), \ \frac{N}{4} \le k \le \frac{N}{2} - 1. \end{cases}$$

Полный направленный граф вычисления ДПФ, полученный последовательным прореживанием по времени, имеет вид, представленный на рис. 4.12.

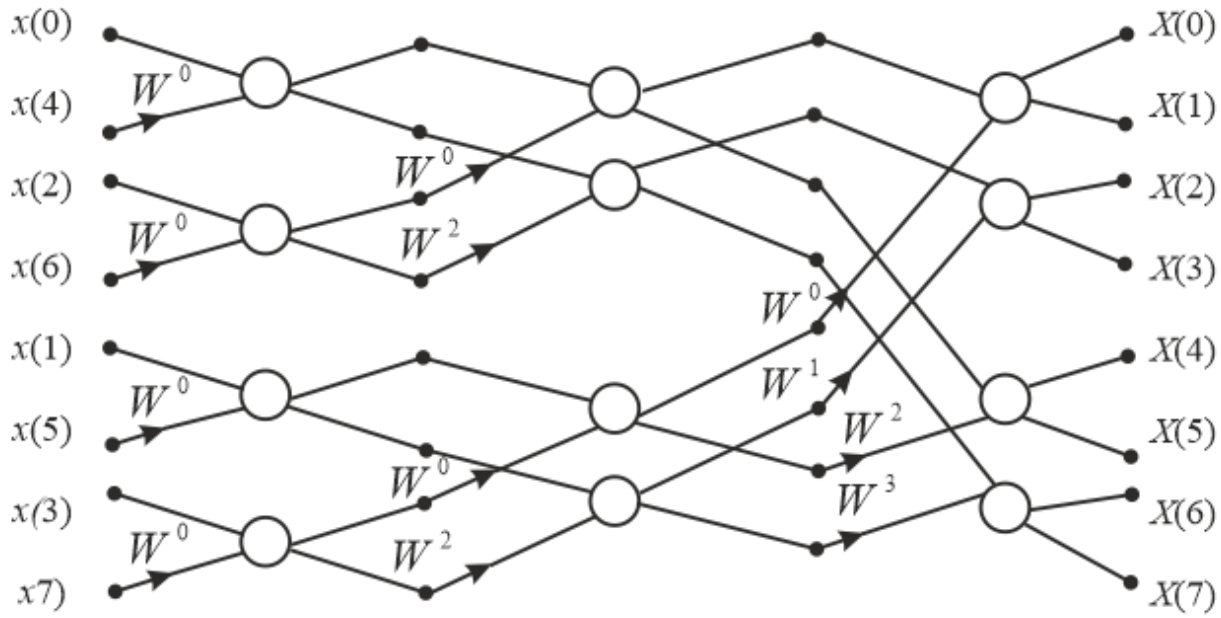


Рис. 4.12. Полный граф БПФ

Особенностью алгоритма БПФ с прореживанием по времени, как и большинства других алгоритмов БПФ, является необходимость такой перестановки отсчетов входной последовательности, чтобы выходная последовательность $X(k)$ имела естественный порядок. Для размера входа $N = 2^l$ последовательность должна быть расположена в двоично-инверсном порядке, чтобы выходная

последовательность получалась в прямом порядке. Пример двоично-инверсного порядка, когда $N = 2^l$ $(l = 3)$, отображается в табл. 4.1.

Таблица 4.1

Номер отсчета входа	Двоичное представление	Двоичная инверсия	Двоично-инверсный номер отсчета
0	000	000	0
1	001	100	4
2	010	010	2
3	011	110	6
4	100	001	1
5	101	101	5
6	110	011	3
7	111	111	7

Оценим вычислительную сложность алгоритма БПФ с прореживанием по времени:

1. Число итераций вычислительного процесса равно $\log_2 N$.

2. Граф содержит $N\log_2 N$ узлов; в каждом узле осуществляется суммирование или вычитание данных.

3. Аддитивная вычислительная сложность алгоритма БПФ равна

$$C_A = N\log_2 N.$$

4. Мультипликативная вычислительная сложность алгоритма БПФ равна

$$C_M = \frac{N}{2}\log_2 N.$$

В табл. 4.2 представлены данные, свидетельствующие об эффективности алгоритма БПФ.

Таблица 4.2

N	Количество умножений при вычислении ДПФ	Количество умножений при вычислении БПФ	Эффективность БПФ
256	65 536	1024	64:1
512	262 144	2304	114:1
1024	1 048 576	5120	205:1
2048	4 194 304	11 264	372:1
4096	16 777 216	24 576	683:1

4.3. Факторизация матрицы ядра ДПФ

Алгоритм БПФ имеет матричную трактовку. Ядро преобразования ДПФ обладает свойством факторизации. Матрицу с этим свойством можно разложить на матрицы-множители. Особенностью множителей является их слабая заполненность ненулевыми элементами. По-другому, матрицы разложения в основном состоят из нулевых элементов. Следовательно, вычисление ДПФ на основе свойства факторизации производится с меньшей вычислительной сложностью в сравнении с вычислением ДПФ по определению (см. подразд. 3.3).

Для рассмотренного примера вычисления БПФ (см. рис. 4.12) комплексный спектр можно записать как

$$\mathbf{X} = \mathbf{V}\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}_1\mathbf{\Phi}_2\mathbf{\Phi}_3\mathbf{P}\mathbf{x}. \tag{4.5}$$

В матричном выражении (4.5) произведение матрицы **P** на вектор **x** соответствует операции перестановки отсчетов последовательности $x(n)$:

$$\mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ x(2) \\ x(3) \\ x(4) \\ x(5) \\ x(6) \\ x(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) \\ x(4) \\ x(2) \\ x(6) \\ x(1) \\ x(5) \\ x(3) \\ x(7) \end{bmatrix}.$$

Матрица **P** перестановки отсчетов последовательности $x(n)$ содержит в каждой строке (столбце) только одну единицу.

Далее по графу БПФ (см. рис. 4.12) можно построить матрицы для каждой итерации. Первая итерация – это вычисление 2-точечных ДПФ. Для $N = 8$ выполняется следующее матричное выражение:

$$\mathbf{X}' = \mathbf{\Phi}_3\mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(4) \\ x(2) \\ x(6) \\ x(1) \\ x(5) \\ x(3) \\ x(7) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x(0) + x(4) \\ x(0) - x(4) \\ x(2) + x(6) \\ x(2) - x(6) \\ x(1) + x(5) \\ x(1) - x(5) \\ x(3) + x(7) \\ x(3) - x(7) \end{bmatrix}.$$

Вторая итерация графа БПФ эквивалентна произведению матриц вида

$$\mathbf{X}'' = \mathbf{\Phi}_2\mathbf{\Phi}_3\mathbf{P}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & & 1 & & & & & \\ & 1 & & W^2 & & & & \\ 1 & & -1 & & & & & \\ & 1 & & -W^2 & & & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & & & 1 & & W^2 \\ & & & & 1 & & -1 & \\ & & & & & 1 & & -W^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0)+x(4) \\ x(0)-x(4) \\ x(2)+x(6) \\ x(2)-x(6) \\ x(1)+x(5) \\ x(1)-x(5) \\ x(3)+x(7) \\ x(3)-x(7) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x(0)+x(4)+x(2)+x(6) \\ x(0)-x(4)+(x(2)-x(6))W^2 \\ x(0)+x(4)-x(2)-x(6) \\ x(0)-x(4)-(x(2)-x(6))W^2 \\ x(1)+x(5)+x(3)+x(7) \\ x(1)-x(5)+(x(3)-x(7))W^2 \\ x(1)+x(5)-x(3)-x(7) \\ x(1)-x(5)-(x(3)-x(7))W^2 \end{bmatrix}.$$

На третьей итерации БПФ производится умножение матриц

$$\mathbf{\Phi}_1\mathbf{X}'' = \mathbf{\Phi}_1\mathbf{\Phi}_2\mathbf{\Phi}_3\mathbf{P}\mathbf{x},$$

где матрица $\mathbf{\Phi}_1$ имеет вид

$$\mathbf{\Phi}_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & 1 & & & \\ & 1 & & & & W^1 & & \\ & & 1 & & & & W^2 & \\ & & & 1 & & & & W^3 \\ 1 & & & & -1 & & & \\ & 1 & & & & -W^1 & & \\ & & 1 & & & & -W^2 & \\ & & & 1 & & & & -W^3 \end{bmatrix}.$$

Особенностью матриц $\mathbf{\Phi}_1, \mathbf{\Phi}_2, \mathbf{\Phi}_3$ является то, что каждая имеет в строке и столбце только два ненулевых элемента, говорят «слабо заполнена». Алгоритм БПФ возможен из-за факторизации матрицы ДЭФ дискретного преобразования Фурье, т. е.

$$\mathbf{\Phi}_1\mathbf{\Phi}_2\mathbf{\Phi}_3 = \mathbf{V}.$$

Замечания:

4.1. Если необходимо вычислить *N*-точечное ДПФ последовательности сравнительно небольшого периода *N*, или, когда входная последовательность содержит малое число ненулевых ее значений, целесообразно прямое использование для расчетов формул ДПФ.

4.2. Оценивая эффективность различных быстрых методов вычисления ДПФ, принимают во внимание:

– число ячеек памяти, необходимых для запоминания значений поворачивающих множителей W^{kn} и значений *N* комплексных чисел входной последовательности;

– процедуру обращения к памяти.

4.3. Особенностью БПФ является выигрыш в вычислении тем больший, чем больше *N*. Например, выполнение БПФ длиной $N = 2097152$ на персональном компьютере занимает приблизительно 5 с. Вычисление ДПФ такой последовательности займет более двух недель.

4.4. Имеются другие алгоритмы быстрых спектральных преобразований, например, алгоритм Винограда.

4.4. Задания для самостоятельного выполнения

1. Дана последовательность $x(n) = \{5; 4; 3; 2\}$. Применить быстрое преобразование Фурье (БПФ) для вычисления коэффициентов ДПФ.

2. Показать, что алгоритм БПФ можно применять для восстановления $x(n)$ по коэффициентам ДПФ (см. задание 1), используемым в качестве исходного массива данных.

3. Оценить вычислительную сложность алгоритма БПФ (см. задание 1).

4. Дана последовательность $x(n) = \{1; 1{,}5; -1{,}2; 4; 2; 2; 1; 1\}$. Показать, что алгоритм БПФ можно применять для восстановления $x(n)$ по коэффициентам ДПФ, используемым в качестве исходного массива данных.

5. Оценить вычислительную сложность алгоритма БПФ (см. задание 4).

6. Изобразить полный граф БПФ для $N = 16$.

7. Изобразить полный граф БПФ для $N = 32$.

5. АЛГОРИТМ ОПТИМАЛЬНОГО ДЕКОДИРОВАНИЯ ПОМЕХОУСТОЙЧИВЫХ КОДОВ

5.1. Основная теорема кодирования для канала с шумом (вторая теорема Шеннона)

В 1948 году Клод Шеннон сформулировал и доказал теоремы кодирования для дискретного канала. Он показал, что с каждым каналом передачи информации связано число C. Это число определяет пропускную способность канала и измеряется в битах в секунду. Если требуемая от информационной системы скорость передачи информации R_i (измеряемая в битах в секунду) меньше C, то, используя коды, контролирующие ошибки, для данного канала можно построить такую информационную систему, что вероятность ошибки на выходе декодера будет сколь угодно мала [2].

Теорема 5.1. Пусть C – пропускная способность дискретного канала без памяти, источник характеризуется энтропией H. Если $H < C$, тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует метод кодирования информации $[n, k, d]$-двоичным кодом, вероятность ошибки декодирования которого $P_{\text{ош}} < \varepsilon$.

Замечание 5.1. Пропускная способность канала – это предельная скорость передачи информации, при которой еще возможна передача со сколь угодно малой вероятностью ошибки.

Теорема, с одной стороны, – фундаментальна, а с другой стороны – неконструктивна.

Фундаментальность заключается в том, что теоремой устанавливается теоретический предел эффективности системы при достоверной передаче информации. При этом:

– помехи в канале не ограничивают точность (достоверность) передачи;

– помехи ограничивают скорость передачи информации, при которой может быть достигнута сколь угодно высокая достоверность передачи;

– при любой конечной скорости передачи информации, вплоть до пропускной способности, сколь угодно малая вероятность ошибки достигается лишь при увеличении длительности кодовых последовательностей и использовании большого ансамбля кодовых слов.

Неконструктивность теоремы заключается в том, что в ней не затрагиваются пути построения кодов, методы обработки, обеспечивающие безошибочную передачу информации, а лишь утверждается их существование.

Рассмотрим **алгоритм контроля над ошибками**.

Определение 5.1. Код – это множество дискретных последовательностей, разрешенное для передачи сообщений.

Коды характеризуются следующими параметрами:

1. *Размерность* q кодового алфавита – число различных элементов алфавита, выбранное для построения кода.

В качестве кодового алфавита могут использоваться символы двоичного {0,1} или бинарного алфавита $\{1, -1\}$. Например, слово $x = (x_0\ x_1\ \dots\ x_6) = (-1-1-111-11)$ представлено символами бинарного алфавита источника, $q = 2$.

2. *Длина n кода* (значность) – число символов кодового слова. Последовательности символов называются кодовыми словами или кодовыми векторами.

3. *Размерность k кода* – число информационных элементов (позиций) кодового слова.

4. *Мощность* $M = q^k$ кода – это число различных кодовых последовательностей (комбинаций), разрешенных для кодирования.

5. *Число проверочных (избыточных)* позиций кодового слова $r = (n - k)$.

6. *Скорость* $R = \frac{k}{n}$ передачи кода.

7. *Кратность t ошибки.* Параметр t указывает, что все конфигурации (комбинации) ошибок кратностью t в любом кодовом слове могут быть исправлены и (или) обнаружены.

8. *Вектор ошибок* $\mathbf{e} = (e_0,\ e_1, \dots, e_{n-1})$. Предположим, что по каналу передается или хранится в памяти двоичный вектор $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, а принимается, или считывается из памяти, вектор $\mathbf{y} = (y_0,\ y_1, \dots, y_{n-1})$. Тогда вектор $\mathbf{y} - \mathbf{x} = \mathbf{e} = (e_0,\ e_1, \dots, e_{n-1})$, где $e_i \in \{0, 1\}$. Если ошибок не произошло, то все $e_i = 0$. Вектор ошибок указывает место и значение ошибок.

9. *Вес вектора* – число ненулевых элементов вектора.

10. *Расстояние Хэмминга* d_x между двумя векторами (степень удаленности любых кодовых последовательностей друг от друга). Если $\mathbf{x} = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ и $\mathbf{y} = (y_0, y_1, \dots, y_{n-1})$ кодовые векторы, то расстояние Хэмминга равно числу позиций, в которых они различаются. Расстояние Хэмминга может обозначаться и как dist (**x**, **y**). Например,

dist ((*a b b c b*), (*c b c a a*) = 4,
dist ((0 1 2 2), (2 2 1 2)) = 3.

11. *Кодовое расстояние* d (минимальное расстояние кода) – это наименьшее значение расстояния Хэмминга для всех пар кодовых последовательностей кода **G**:

$$d = \min\{\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\}, \text{ где } \mathbf{x} \in \mathbf{G},\ \mathbf{y} \in \mathbf{G},\ \mathbf{x} \neq \mathbf{y}.$$

Кодовое расстояние d характеризует корректирующую способность кода:

$$t = f(d).$$

Определение 5.2. Код значностью *n*, размерностью *k* и расстоянием d называется $[n, k, d]$-кодом.

Пример 5.1. Задана матрица $\mathbf{G}$ $[5, 2, 2]$-кода

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Найти кодовое расстояние кода.

Решение. Данный код можно использовать для кодирования 2-битовых двоичных чисел, используя следующее (произвольное) соответствие:

$$0\,0 \leftrightarrow 0\,0\,0\,0\,0,$$
$$1\,0 \leftrightarrow 1\,0\,1\,1\,0,$$
$$0\,1 \leftrightarrow 0\,1\,0\,1\,0,$$
$$1\,1 \leftrightarrow 1\,1\,1\,0\,0.$$

Найдем кодовое расстояние кода:

$$\text{dist}((1\,0\,1\,1\,0), (0\,1\,0\,1\,0)) = 3,$$
$$\text{dist}((1\,0\,1\,1\,0), (1\,1\,1\,0\,0)) = 2,$$
$$\text{dist}((0\,1\,0\,1\,0), (1\,1\,1\,0\,0)) = 2.$$

Для этого кода $d = \min\{\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y})\} = 2$.

Под воздействием помех происходит искажение отдельных разрядов вектора разрешенного подмножества. В результате разрешенные для передачи кодовые векторы переходят в другие векторы (с иными координатами) – запрещенные. Факт перехода разрешенного слова в запрещенное можно использовать для контроля над ошибками.

Возможна ситуация, когда разрешенный вектор переходит в другой разрешенный кодовый вектор. В этом случае ошибки не обнаруживаются, и контроль становится неэффективным.

Различают два режима контроля передаваемой кодированной информации: обнаружение и исправление ошибок.

Обнаружение ошибок. Стратегия обнаружения ошибок в переданном слове заключается в следующем. Можно обнаружить ошибку, если установить, что переданным словом было ближайшее по расстоянию Хэмминга к принятому слову. Покажем применение этого утверждения.

Пусть подмножество $\mathbf{G}$ разрешенных для передачи кодовых слов трехмерного пространства над множеством $\{0, 1\}$ представлено в виде двоичных векторов с четным весом (четным числом единиц):

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Заданный код $\mathbf{G}$ имеет $d = 2$. Запрещенные кодовые слова представлены в виде подмножества

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Если $d = 2$, то ни одно из разрешенных кодовых слов (т. е. кода $\mathbf{G}$) при одиночной ошибке не переходит в другое разрешенное слово этого же кода.

Таким образом, код $\mathbf{G}$ обнаруживает:

– одиночные ошибки;

– ошибки нечетной кратности (для $n = 3$ – тройные).

Например, тройная ошибка вектора $\mathbf{x}$ = (110) при векторе $\mathbf{e}$ = (111) переводит его в запрещенный вектор $\mathbf{y} = \mathbf{x} \oplus \mathbf{e} = (001)$.

Рассмотрим алгоритм декодирования в режиме обнаружения.

Допустим, передавался вектор $\mathbf{x}$ = (101). Возникла одиночная ошибка, вектор которой $\mathbf{e}$ = (100). На вход декодера поступил вектор $\mathbf{y} = \mathbf{x} \oplus \mathbf{e} = (001)$. Данный вектор принадлежит запрещенному подмножеству $\mathbf{A}$. Следовательно, декодер устанавливает, что при передаче информации произошла ошибка. Таким образом, осуществляется контроль ошибок.

Еще раз рассмотрим утверждение: переданным словом было то, которое является ближайшим по расстоянию Хэмминга к принятому. Вычислим расстояния Хэмминга для всех слов разрешенного подмножества $\mathbf{G}$ и входным вектором $\mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_1(000, 001) &= 1, \\ \mathrm{dist}_2(101, 001) &= 1, \\ \mathrm{dist}_3(011, 001) &= 1, \\ \mathrm{dist}_4(110, 001) &= 3. \end{aligned}$$

Наиболее вероятно, что передаваемыми могли быть следующие слова:

$$\mathbf{x}_1 = (000), \mathbf{x}_2 = (101), \mathbf{x}_3 = (011).$$

Вывод. В общем случае при необходимости обнаруживать ошибки кратностью t кодовое расстояние кода должно удовлетворять выражению

$$d \geq t + 1. \qquad (5.1)$$

Исправление ошибок.

Пусть n = 3, q = 2, код $\mathbf{G}$ задан векторами $\mathbf{x}_1$ = (000) и $\mathbf{x}_2$ = (111). При возникновении одиночных ошибок или множества векторов

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

кодовому слову $\mathbf{x}_1 = (000)$ соответствует запрещенное подмножество

$$\mathbf{A} = \{\mathbf{x}_1 \oplus \mathbf{e}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Кодовому слову $\mathbf{x}_2 = (111)$ соответствует следующее запрещенное подмножество:

$$\mathbf{L} = \{\mathbf{x}_2 \oplus \mathbf{e}\} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Таким образом, коду $\mathbf{G}$, разрешенному для передачи подмножеств векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$, соответствуют два запрещенных подмножества векторов $\{\mathbf{A}\}$ и $\{\mathbf{L}\}$:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{A} \\ \hline \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{L} \end{matrix}.$$

Стратегия исправления ошибок заключается в следующем:

– каждая из одиночных ошибок приводит к запрещенному кодовому слову того или иного запрещенного подмножества ($\mathbf{L}$ и $\mathbf{A}$);

– структура кодового запрещенного подмножества, относящаяся к соответствующему исходному разрешенному подмножеству, позволяет определить местоположение ошибки, т. е. исправить ошибку.

Допустим, передавалось кодовое слово $\mathbf{x}_2 = (111)$. Возникла одиночная ошибка, вектор которой $\mathbf{e} = (100)$. На вход декодера поступил вектор

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} \oplus \mathbf{e} = (011).$$

Вычислим расстояния Хэмминга для всех слов разрешенного подмножества $\mathbf{G}$ и входным вектором $\mathbf{y}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}_1(000, 011) &= 2, \\ \mathrm{dist}_2(111, 011) &= 1. \end{aligned}$$

Наиболее вероятно передавалось слово

$$\mathbf{x}_2 = (111).$$

Для исправления ошибок кратностью t кодовое расстояние должно удовлетворять соотношению

$$d \geq 2t + 1. \tag{5.2}$$

5.2. Вектор ошибок

Пусть канал характеризуется вероятностью ошибки на символ p. Введем вектор ошибки $\mathbf{e} = (e_1 \ldots e_j \ldots e_n)$, $e_j = 1$ с вероятностью p и $e_j = 0$ с вероятностью $(1 - p)$. Найдем вероятность возникновения нескольких конфигураций векторов $\mathbf{e}$ ошибок для кодового слова длиной $n = 5$.

$\text{Prob}\{\mathbf{e} = (00000)\} = (1 - p)^5$ – вероятность правильного приема кодового слова длиной 5.

Вероятность возникновения конфигурации вектора ошибок вида $\mathbf{e} = (10000)$ равна

$$\text{Prob}\{\mathbf{e} = (10000)\} = p(1 - p)^4.$$

Вероятность вектора ошибок вида $\mathbf{e} = (10010)$ равна

$$\text{Prob}\{\mathbf{e} = (10010)\} = p^2(1 - p)^3.$$

В общем случае вероятность возникновения вектора $\mathbf{e}$ ошибок весом i запишется в виде

$$\text{Prob}\ \{\mathbf{e}_{wt(i)}\} = p^i(1 - p)^{n-i}. \tag{5.3}$$

Вероятность правильного приема кодового слова длиной n равна

$$\text{Prob}\{\mathbf{e}_{wt(0)}\} = (1 - p)^n.$$

Пусть $p = 0{,}2$, $n = 5$. Рассмотрим возможные значения вероятности возникновения векторов ошибок в зависимости от их конфигурации.

1. Вероятность того, что не произошло ни одной ошибки на длине кодового слова, равна

$$\text{Prob}\{\mathbf{e}_{wt(0)} = (00000)\} = (1 - 0{,}2)^5 \cong 0{,}32.$$

2. Вероятность того, что на длине кодового слова имеется ошибка единичного веса, равна

$$\text{Prob}\{\mathbf{e}_{wt(1)} = (10000)\} = p^1(1-p)^4 = 0{,}2(1-0{,}2)^4 \cong 0{,}081.$$

3. Вероятность того, что произошли две ошибки на длине кодового слова, равна

$$\text{Prob}\{\mathbf{e}_{wt(2)} = (10010)\} = p^2(1-p)^3 = 0{,}2^2(1-0{,}2)^3 \cong 0{,}01.$$

Из этого следуют очевидные выводы, которые необходимо учитывать при реализации алгоритма декодирования:

1. Вектор ошибок единичного веса более вероятен, чем вектор ошибок веса два и т. д.

2. Ошибки малого веса необходимо обнаруживать и исправлять в первую очередь.

5.3. Алгоритм декодирования кода на основе принципа максимального правдоподобия

Определение 5.3. Декодирование кода на основе вычисления вектора ошибки $\mathbf{e}$ с наименьшим весом называется декодированием на основе принципа максимального правдоподобия, или декодированием в ближайшее кодовое слово.

Пусть код состоит из множества $\{x\}$ кодовых слов $x = (x_0\ x_1\ \ldots\ x_{n-1})$, $x_i \in \{0, 1\}$. Предположим, что по каналу с шумом передается или хранится в памяти двоичный вектор $\mathbf{x} = (x_0\ x_1\ \ldots\ x_{n-1})$, а принимается или считывается из памяти вектор

$$\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e} = (y_0\ y_1\ \ldots\ y_{n-1}), y_i \in \{0, 1\}.$$

Вектор ошибок

$$\mathbf{e} = \mathbf{y} - \mathbf{x} = (e_0\ e_1\ \ldots\ e_{n-1}), e_i \in \{0, 1\}.$$

Форма (структура) вектора ошибок указывает местоположение ошибок. Количество единиц (вес) на длине вектора ошибок $\mathbf{e}$ определяет число ошибок t. Декодер, анализируя (наблюдая) вектор $\mathbf{y} = \mathbf{x} + \mathbf{e}$, должен решить, какой вектор $\mathbf{x} \in \{x\}$ передавался. Декодирование сводится к нахождению наиболее вероятного вектора ошибок $\mathbf{e}$ для принятого вектора $\mathbf{y}$. Если передаваемые кодовые слова имеют равные вероятности, такая стратегия декодирования является оптимальной. В этом случае декодер работает с минимально возможной ошибкой декодирования P_f, а стратегия называется декодированием по максимуму правдоподобия. Рассматриваемый алгоритм эквивалентен декодированию в ближайшее кодовое слово. Практическая реализация этого алгоритма выполняется путем

сравнения входа y со всеми словами множества $\{x\}$ и принятия решения о ближайшем слове.

Так как вектор ошибок меньшего веса более вероятен, то входной вектор **y** декодируется в вектор **x** из множества $\{\mathbf{x}\}$, который менее всего отличается от **y**. Говорят, вектор **y** декодируется в ближайший вектор $\boldsymbol{x}$ в смысле расстояния.

Декодирование на основе принципа максимального правдоподобия эквивалентно корреляционному методу [12]. Тогда декодирование сводится к вычислению корреляции принимаемой последовательности со всеми кодовыми словами кода (см. подразд. 2.7, 3.4).

Пусть имеется псевдослучайная последовательность $X = (x_0 x_1 \dots x_{n-1})$, задающая помехоустойчивый $[n, k, d]$-код максимальной длины. Длина кода $n = 2^k - 1$. Кодовыми словами являются все циклические сдвиги одной последовательности, записанные в бинарном алфавите $-1, 1$. Связь между бинарным и двоичным алфавитами определяется соотношениями: $(1 \to 0)$, $(-1 \to 1)$. Циклические сдвиги последовательности X определяют разрешенное пространство кодовых слов кода, записанное в виде матрицы **A** размером $(2^k - 1) \times n$, где $M = (2^k - 1)$ – мощность кода, $k \geq 3$. Строки матрицы **A** образуют множество $\{X\} = \{X_1, \dots, X_M\}$ слов кода. В канале без шумов декодирование заключается в вычислении вектора

$$\mathbf{Y} = \frac{1}{n}\mathbf{AX} = (y_0 y_1 \dots y_{n-1})^T, \mathbf{X} \in \mathbf{A}, \tag{5.4}$$

и определении номера l координаты y_l, для которой выполняется условие

$$y_l = \max_i y_i.$$

Пример 5.2. Имеется источник на множестве символов алфавита $\{A, B, C, D, E, F, I\}$. Множеству ставится в соответствие ансамбль $\{X\} = \{X_1, \dots, X_7\}$ слов m-кода с параметрами [7, 3, 4]. Код описывается матрицей **A** вида

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{5.5}$$

В качестве задающей последовательности кода выбрана $X_1 = (x_0\ x_1\ \dots\ x_6) = (1\ 1 -1\ 1 -1 -1 -1)$. Символ A кодируется словом

$X_1 = (1\ 1 - 1\ 1 - 1 - 1 - 1)$. Символу B соответствует $X_2 = (1 - 1\ 1\ -1 - 1 - 1\ 1)$ и т. д. Декодировать входной вектор $\mathbf{Y} = \mathbf{X} + \mathbf{E} = (-1 - 1\ 1\ 1 - 1\ 1\ -1)$ на основе принципа максимального правдоподобия.

Решение. Вычисляя вектор $\mathbf{Y}$ по формуле (5.4), получим

$$\mathbf{Y} = (-1/7, -1/7, -1/7, -1/7, -1/7,\ 1, -1/7)^T.$$

Максимальное значение имеет компонента $y_5 = 1$, поэтому по каналу передавался символ F. На рис. 5.1 показан график функции $r(\tau) = y(\tau), \tau = = 0, 1, ..., n-1$.

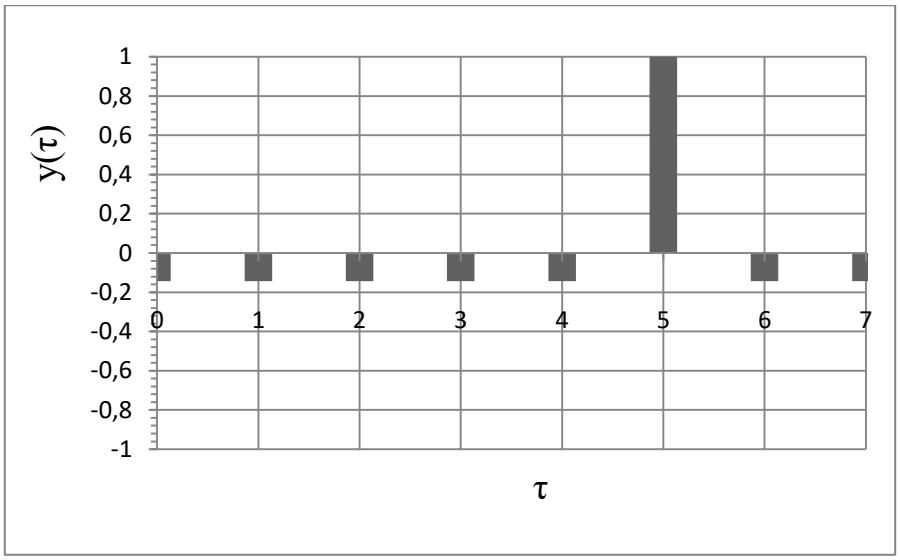


Рис. 5.1. Корреляционная функция последовательности $X = (-1 - 1\ 1\ 1 - 1\ 1 - 1)$

Предположим, что некоторый вектор $\mathbf{X} \in \mathbf{A}$ подлежит передаче по каналу с шумами. Из-за возможного воздействия шумов на выходе канала наблюдается (принимается) вектор вида

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{X} + \mathbf{E})\mathrm{mod}2 = (z_0 z \ldots z_{n-1}),$$

где $\mathbf{E} = (e_0\ e_1 \ldots\ e_{n-1}), e_i \in \{1, -1\}$ – вектор ошибок, определяемый как

$$\mathbf{E} = (\mathbf{Z} - \mathbf{X})\mathrm{mod}2.$$

Если ошибок не произошло, то все $e_i = 0$. Вектор ошибок указывает место ошибки на длине вектора $\mathbf{X}$. Количество единиц на длине вектора ошибок $\mathbf{E}$ определяет число ошибок t. Декодер, анализируя вектор $\mathbf{Z} = \mathbf{X} + \mathbf{E}$, должен решить, какой вектор $\mathbf{X}$ из множества $\{\mathbf{X}\}$ передавался. Вектор $\mathbf{Z}$ декодируется в ближайший вектор $\mathbf{X}$ на множестве $\{\mathbf{X}\}$ в смысле расстояния Хэмминга. Практическая

реализация этого алгоритма декодирования выполняется путем сравнения входа $\mathbf{Z}$ со всеми словами множества $\{\mathbf{X}\}$ и принятия решения о ближайшем слове.

Пример 5.3. Пусть имеется источник и код, задаваемый матрицей $\mathbf{A}$ (см. пример 5.2). На вход декодера поступил вектор $\mathbf{Z} = (1\ 1\ 1 - 1\ 1 - 1 - 1)$. Определить принимаемый символ источника.

Решение. Выполняя корреляционное декодирование по формуле

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}\mathbf{Z}^T = (y_0 y_1 \dots y_{n-1})^T,$$

получим вектор

$$\mathbf{Y} = (1, 1, -3, 1, -3, -3, 5)^T.$$

Максимальное значение имеет координата $y_6 = 5$ вектора $\mathbf{Y}$. По каналу передавалось кодовое слово $X_7 = (-1\ 1\ 1 - 1\ 1 - 1 - 1)$ (рис. 5.2).

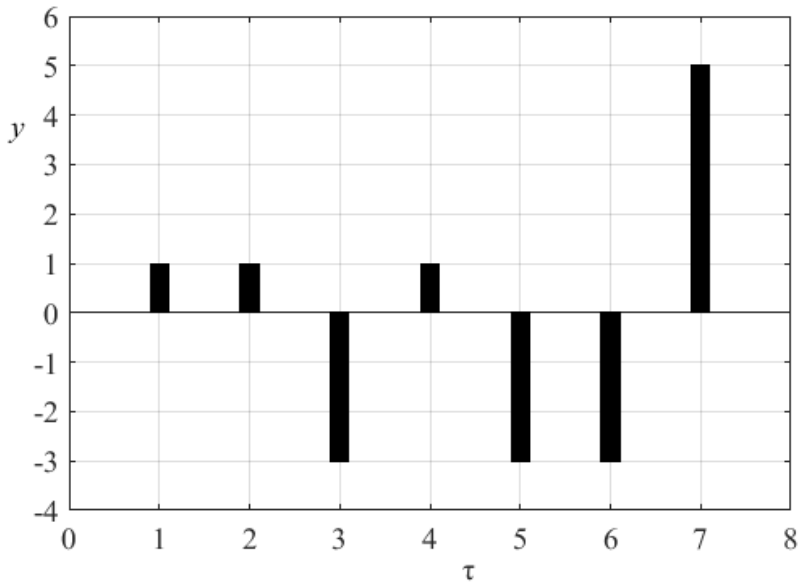


Рис. 5.2. Корреляционная функция последовательности $Z = (1\ 1\ 1 - 1\ 1 - 1 - 1)$

Этому слову соответствует символ I. Вектор ошибки $\mathbf{E}$ соответствует следующей последовательности с наименьшим единичным весом:

$$\mathbf{E} = (\mathbf{Z} - \mathbf{X})\mathrm{mod}2 = (1\ 1\ 1 - 1\ 1 - 1 - 1) - (-1\ 1\ 1 - 1\ 1 - 1 - 1) =$$
$$= (-1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1) \rightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0).$$

Как видно, ошибка произошла в первом чипе слова X_7. Найденный вектор $\mathbf{E}$ является наиболее вероятным для принятого вектора $\mathbf{Z}$. Расстояние Хэмминга между векторами $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{X}_7$ равно $d_x = 1$. Это расстояние является минимальным на пространстве кодовых векторов кода (матрицы $\mathbf{A}$).

5.4. Задания для самостоятельного выполнения

Имеется источник на множестве символов алфавита $\{1, -1\}$. Этому множеству ставится в соответствие низкоскоростной псевдослучайный $[15, 4, 8]$ m-код $\{X\} = \{X_1, \dots, X_7\}$. Код задается последовательностью $\{X\} = \{X_1, \dots, X_{15}\}$ m-кода.

1. Построить множество ненулевых кодовых слов $[15, 4, 8]$-кода в виде матрицы **A** циклически сдвинутых псевдослучайных последовательностей. Псевдослучайная последовательность, порождающая код, имеет форму

$$X = (x_0 x_1 \dots x_{14}) = (-1\ -1\ -1\ -1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1).$$

2. Декодировать произвольно выбранное кодовое слово кода (см. задание 1) с использованием алгоритма максимального правдоподобия.

3. Декодировать входные кодированные векторы **Z** (см. задание 1):

$$\mathbf{Z}_1 = (-1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1),$$
$$\mathbf{Z}_2 = (1\ -1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1),$$
$$\mathbf{Z}_3 = (1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1),$$
$$\mathbf{Z}_4 = (1\ 1\ -1\ 1\ -1\ -1\ -1\ -1\ 1\ 1\ -1\ 1\ 1\ 1\ -1\ 1\ ).$$

4. По расчетным данным (см. задание 3) представить графические пояснения результатов декодирования.

5. Используя результаты расчетов (см. задание 3), найти векторы ошибок **E** и определить местоположение ошибок в кодированных сообщениях.

6. ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

6.1. Эффективное представление и описания границы, формы объекта интереса на изображении

Задача описания формы объекта на изображении возникает при необходимости распознавания или идентификации отдельных областей или объектов на изображениях, когда важны очертания объектов, присутствующих на изображении, а детали, содержащиеся внутри объектов или внутри фона, не представляют интереса. В определенных приложениях (топография, экологический мониторинг, анализ медицинских изображений и др.) для снижения объема массива данных, описывающих объект, желательно заменить множество пикселей, изображающих объект, описанием его границы. Например, возможный подход к решению проблемы стандартизации цитологической диагностики основывается на применении методов и техники распознавания образов объектов – контуров границ, областей, текстурных признаков ядра, клетки и пр. Представление границами подходит для тех случаев, когда в центре внимания находятся такие геометрические характеристики объекта, как длина границы, изгибы, очертания, число вогнутостей границы. Граница является полным и компактным представлением геометрии объекта. По границе можно выделить дополнительные параметры формы. Представление областями более уместно, если акцент делается на внутренних характерных признаках, например, ядра клетки. Описание формы объекта не имеет широкого применения на практике, если непосредственное вычисление параметров формы представляется чрезмерно сложным и громоздким.

6.2. Спектральный алгоритм кодирования сигналов

Важным для практики эффективного описания коррелированных сигналов данных является подход, в котором представление формы строится путем сведения ее к спектральным признакам (дескрипторам). В общем случае этот подход соответствует спектральному методу кодирования одномерных сигналов, например, аудиопроцессов, двумерных сигналов (изображений). Спектральные методы кодирования сигналов основаны на том, что цифровой эквивалент аналогового сигнала путем соответствующего линейного ортогонального преобразования может быть приведен к виду, который позволяет устранить избыточность многих реальных сигналов [13]. Повышение эффективности описания связано со следующими факторами:

– после линейного ортогонального преобразования исходных коррелированных данных значения ряда коэффициентов преобразования (трансформант) становятся настолько малыми по величине, что их можно отбросить (отфильтровать) без практически заметного ухудшения качества восстанавливаемых данных или сигналов 1D, 2D;

– в процессе линейного ортогонального преобразования коррелированных данных осуществляется их декорреляция, обеспечивающая повышение эффективности кодирования и тем самым эффективности описания исходных данных;

– различные методы квантования коэффициентов преобразования позволяют существенно сократить объем передаваемой (хранимой) информации без заметного ухудшения качества сигналов при их восстановлении посредством применения к передаваемым (хранимым) трансформантам обратного линейного ортогонального преобразования.

Сущность спектральных методов кодирования 1*D*-, 2*D*-сигналов заключается в том, что кодируется и передается (хранится) не сам сигнал, а значения трансформант. В процессе ортогонального преобразования сигнала, имеющего сильные корреляционные связи между смежными или близкими его составляющими (отсчетами), происходит декорреляция. Значения трансформант оказываются практически некоррелированными. В отличие от исходных данных, для которых характерно в среднем равномерное распределение энергии между составляющими сигнала, распределение энергии между трансформантами резко неравномерно. Основная энергия сигнала в области преобразований приходится на коэффициенты с малыми номерами (индексами), т. е. в области низких частот для 1*D*-сигналов или в области низких пространственных частот для 2*D*-сигналов. В дальнейшем коэффициенты, имеющие малую амплитуду, опускаются либо квантуются на малое число уровней, что позволяет использовать меньшую длину кода для их передачи (хранения).

В качестве признаков, участвующих в описании, в сопоставлении с конкретным образом и при разделении классифицируемых изображений могут выступать коэффициенты известного преобразования Фурье (Фурье-дескрипторы, см. разд. 3). Однако ДПФ обладает таким недостатком, как необходимость работы с комплексными числами, что приводит к удвоению комплексных вычислений. Вычислительная сложность еще более возрастает, когда ДПФ выполняется по 2*D* независимым переменным.

Описание объекта в виде границы, области после процесса сегментации изображений выполняется на основе точечных, линейных (одномерных) и двумерных представлений. Линейные и двумерные объекты могут представляться в виде замкнутых внешних и внутренних контуров. Пространственные данные, описывающие границу, могут иметь высокую размерность. Тогда на этапе получения признаков распознавания вычислительная и временная сложность обработки также возрастает. С целью упрощения обработки и процесса классификации образа объекта следует понижать размерность входа классификатора. Одним из приемов снижения вычислительной сложности является устранение пространственной избыточности, уменьшение количества анализируемых признаков. Понижать размерность следует таким образом, чтобы сопутствующее этому увеличение ошибки распознавания было относительно невелико.

Известно, что среди всех линейных преобразований данных оптимальным по отношению к критерию наименьшего значения среднеквадратичной ошибки

при неполной размерности (неточном задании координат) является декоррелирующее преобразование Хотеллинга. Однако это преобразование не обладает быстрыми алгоритмами вычисления, что затрудняет его практическое использование в определенных приложениях. Для многих приложений эффективное представление (кодирование) коррелированных сигналов можно реализовать, используя действительные ортогональные преобразования. Далее рассматривается вычислительный алгоритм кодирования (сжатия) изображения границы объекта с использованием действительного дискретного преобразования Хартли (ДПХ). Кроме того, в отличие от ДПФ прямое и обратное преобразования совпадают. Применительно к вещественным данным изображения обеспечивается значительная экономия вычислительных и временных ресурсов, упрощается обработка сигналов. Если форма границы не имеет резких изломов, Хартли-дескрипторы подходят для эффективного описания объекта изображения.

6.2.1. Хартли-дескрипторы

В отличие от ДПФ, ортогональный базис Хартли, заданный на интервале из N точек 0, 1, ..., $N-1$, выражается действительными числами

$$h_{nv} = \mathrm{cas}\left(\frac{2\pi vn}{N}\right) = \cos\left(\frac{2\pi vn}{N}\right) + \sin\left(\frac{2\pi vn}{N}\right), n, v \in \{0,1,\dots,N-1\}. \quad (6.1)$$

Параметр N соответствует периоду обрабатываемого дискретного сигнала $g_n = (g_0, g_1, \dots, g_{N-1})$, где g_i – дискретное действительное i-е значение сигнала g_n. Параметр n соответствует аргументу (в качестве которого, например, выступает временной параметр) дискретного $1D$-сигнала. Параметр v соответствует аргументу (в качестве которого, например, выступает частотный параметр) дискретного $1D$-сигнала в области преобразований.

Например, матрица $\mathbf{H}_{nv}$ дискретного множества ортогональных функций ДПХ размером 8×8 имеет следующий вид:

$$\mathbf{H}_{nv} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 & 0 & -1 & -\sqrt{2} & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -\sqrt{2} & 1 & 0 & -1 & \sqrt{2} & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Параметр n определяет номер столбца матрицы $\mathbf{H}_{nv}$ – ядра ДПХ. Параметр v определяет номер строки матрицы ядра ДПХ. Например, элемент ядра для значений $N = 8, v = 1, n = 1$ равен

$$h_{1,1} = \text{cas}\left(\frac{2\pi \cdot 1 \cdot 1}{8}\right) = \cos\left(\frac{2\pi \cdot 1 \cdot 1}{8}\right) + \sin\left(\frac{2\pi \cdot 1 \cdot 1}{8}\right) =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Пара $1D$ ДПХ последовательности $g_n = (g_0, g_1, \ldots, g_{N-1})$ определяется равенствами

$$\hat{g}_v = \sum_{n=0}^{N-1} g_n \text{cas}\left(\frac{2\pi vn}{N}\right), v = 0,1, \ldots, N-1, \quad (6.2)$$

$$g_n = \frac{1}{N}\sum_{v=0}^{N-1} \hat{g}_v \text{cas}\left(\frac{2\pi vn}{N}\right), n = 0,1, \ldots, N-1, \quad (6.3)$$

где $\hat{g}_v = (\hat{g}_0, \hat{g}_1, \ldots, \hat{g}_{N-1})$ – коэффициенты Хартли (Хартли-образ) последовательности отсчетов g_n.

Выражение (6.2) задает коэффициенты разложения действительной дискретной функции g_n по дискретным функциям $\text{cas}\left(\frac{2\pi vn}{N}\right)$. При этом g_n задается на дискретном множестве (например, дискретном времени) $n \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$.

В матричном представлении операции $1D$ ДПХ векторов $\mathbf{g}$ и $\hat{\mathbf{g}}$ выражаются как

$$\hat{\mathbf{g}} = \mathbf{H}_{nv}\mathbf{g} \text{ и } \mathbf{g} = \frac{1}{N}\mathbf{H}_{nv}\hat{\mathbf{g}}, \quad (6.4)$$

где $\mathbf{g}$ – вектор-столбец дискретных значений сигнала размером $N \times 1$;

$\hat{\mathbf{g}}$ – вектор-столбец спектральных коэффициентов ДПХ размером $N \times 1$;

$\mathbf{H}_{nv}$ – матрица дискретного множества ортогональных функций ДПХ размером $N \times N$.

Как видно из (6.4), прямое и обратное преобразования Хартли не имеют различий, они взаимно симметричны. Двумерное прямое ДПХ массивов данных и обратное ДПХ коэффициентов Хартли размером $N \times N$ определяются соотношениями:

$$\hat{g}_{uv} = \sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1} g_{mn} \text{cas}\left(\frac{2\pi vn + 2\pi un}{N}\right), \quad u, v \in \{0,1, \ldots, N-1\}, \quad (6.5)$$

$$g_{mn} = \frac{1}{N^2}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} \hat{g}_{uv} \text{cas}\left(\frac{2\pi vn + 2\pi un}{N}\right), \quad m, n \in \{0,1, \ldots, N-1\}. \quad (6.6)$$

В матричном представлении выражения (6.5) и (6.6) записываются в виде

$$\widehat{\mathbf{G}} = \mathbf{H}_{nv}\mathbf{G}\mathbf{H}_{nv}, \ \mathbf{G} = \frac{1}{N^2}\mathbf{H}_{nv}\widehat{\mathbf{G}}\mathbf{H}_{nv}. \quad (6.7)$$

6.2.2. Описание границы

Будем считать, что произведена замена исходного полутонового изображения бинарным. Пусть дискретная граница g области содержит N отсчетов (точек). Ее можно представить в виде двумерной функции

$$g_{x_n,y_n},\ n\in\{0,\ 1,\ \dots,\ i,\dots,N-1\},$$

где (x_i, y_i) – это целочисленные пары декартова произведения Z^2.

Каждой точке контура границы однозначно соответствует функция g_{x_i,y_i}. Весь контур представляется 2D-точечной последовательностью

$$g_{x_i,y_i}=((g_{x_0,y_0}),\ \dots,\ (g_{x_i,y_i}),\ \dots,\ (g_{x_{N-1},y_{N-1}})). \qquad (6.8)$$

Образуем из координат последовательности g_{x_i,y_i} две одномерные последовательности (векторы)

$$g_n^x=(g_0^x,\ g_1^x,\ \dots,\ g_{N-1}^x), \qquad (6.9)$$

$$g_n^y=(g_0^y,\ g_1^y,\ \dots,\ g_{N-1}^y). \qquad (6.10)$$

С учетом представления ДПХ (6.2) 1D-последовательностям g_n^x и g_n^y со значениями координат декартова произведения Z^2 (по оси x и оси y) соотствуют дескрипторы Хартли $\hat{g}_v^x$ и $\hat{g}_v^y$. Эти последовательности отображают Хартли-образы (спектр Хартли) границы объекта. Такая запись двумерной границы g области позволяет уменьшить вычислительные затраты на ее описание. При решении задачи распознавания понижение размерности входа классификатора реализуется посредством эффективного представления последовательностей g_n^x и g_n^y в спектральном базисе ДПХ. Решение этой задачи возможно на основе дисперсионного или порогового способа фильтрации коэффициентов преобразования Хартли. Для этого осуществляется выделение из последовательностей $\hat{g}_v^x$ и $\hat{g}_v^y$ трансформант с наибольшими дисперсиями. В методах распознавания бинарных изображений, основанных на сопоставлении, незнакомый образ приписывается к тому классу, прототип которого оказывается ближайшим в смысле заранее выбранной метрики. Выбранное после снижения размерности подмножество признаков должно соответствовать вектору признаков образа границы, исходя, например, из критерия минимального расстояния между ними. Предполагается, что чем меньше расстояние между сравниваемыми объектами, тем больше их степень сходства.

Пример 6.1. Оценить эффективность кодирования (описания) замкнутого 16-точечного контура (рис. 6.1) с использованием Хартли-дескрипторов и дисперсионного способа фильтрации коэффициентов ДПХ. Вычислить ошибку восстановления точек границы после операции спектрального кодирования.

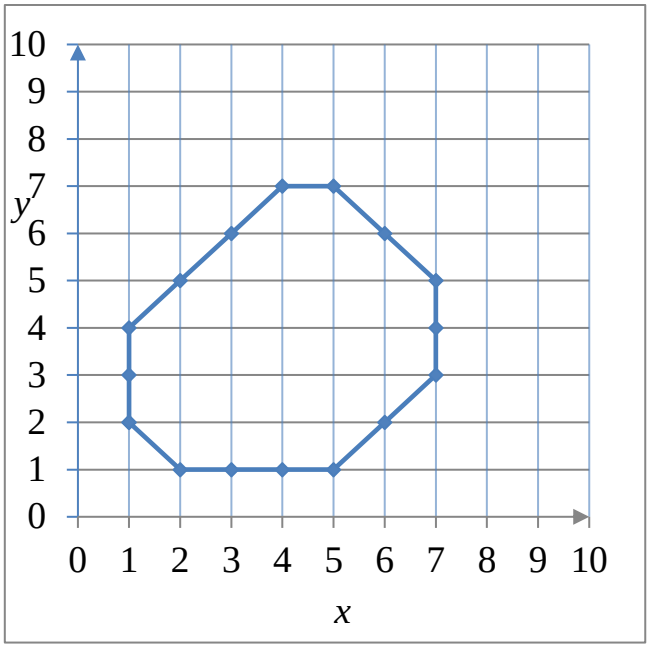


Рис. 6.1. 16-точечная граница объекта

Решение. 1. Контур представляем 2*D*-точечной последовательностью (6.8) g_{x_i,y_i}. Начальная точка описания контура имеет координаты $(x_0, y_0) = (1,\ 2)$. Точкам границы соответствует 2*D*-последовательность

$$g_{x_i,y_i} = ((1,\ 2), (1,\ 3), (1,\ 4), (2,\ 5), (3,\ 6), (4,\ 7), (5,\ 7), (6,\ 6),$$
$$(7,\ 5), (7,\ 4), (7,\ 3), (6,\ 2), (5,\ 1), (4,\ 1), (3,\ 1), (2,\ 1)).$$

Исходные одномерные последовательности (6.9), (6.10):

$$g_n^x = (1, 1,\ 1,\ 2,\ 3, 4,\ 5, 6,\ 7,\ 7,\ 7, 6,\ 5, 4,\ 3, 2),$$
$$g_n^y = (2, 3,\ 4, 5,\ 6, 7,\ 7, 6,\ 5, 4,\ 3, 2,\ 1, 1,\ 1, 1).$$

2. По формуле (6.2) выполняется ДПХ последовательностей g_n^x и g_n^y. Получаем последовательности дескрипторов (признаков), представляющие исходные координаты границы объекта наблюдения:

$$\hat{g}_v^x = (64; -31{,}72; 0; -1{,}64; 0; 0{,}3; 0; -0{,}5;$$
$$0; -1{,}2; 0; -0{,}72; 0; 0{,}62; 0; -13{,}14),$$

$$\hat{g}_v^y = (58; 6{,}57; -2{,}41; 1{,}16; 0; 0{,}36; 1; 0{,}11;$$
$$0; 0{,}25; 0{,}41; -0{,}24; -2; 0{,}82; 1; -33{,}03).$$

3. Для осуществления понижения размерности поля дескрипторов (трансформант) рассчитывается функция распределения дисперсии коэффициентов $\hat{g}_v^x$ и $\hat{g}_v^y$. Коэффициенты Хартли с минимальными значениями дисперсии определяют зону фильтрации трансформант или зону сохранения M спектральных коэффициентов. Из последовательностей $\hat{g}_v^x$ и $\hat{g}_v^y$ соответственно отбираются и затем передаются (сохраняются) по три коэффициента с максимальными дисперсиями:

$$M_x = 3 \text{ и } M_y = 3.$$

В зону отбора входят коэффициенты $\hat{g}_v^x$ и $\hat{g}_v^y$, координаты которых соответствуют множеству

$$\{L\} = \{(x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_{14}, y_{14})\}.$$

Адресная информация о зоне фильтрации трансформант определяется только двумя крайними координатами множества $\{L\}$. Получаем усеченные последовательности ДПХ:

$$\hat{g}_{\hat{v}}^x = (64;\ -31{,}72;\ -13{,}14),$$
$$\hat{g}_{\hat{v}}^x = (58;\ 6{,}57;\ -33{,}03).$$

4. Восстановление изображения границы области произведем по M_x и M_y спектральным коэффициентам Хартли. Применяя формулу (6.3) для усеченных последовательностей, получаем оценки коэффициентов Хартли $\tilde{g}_n^x$ и $\tilde{g}_n^y$:

$$\tilde{g}_n^x = (1{,}96; 0{,}96; 1{,}2; 1{,}85; 2{,}84; 4; 5{,}16; 6{,}15;$$
$$6{,}8; 7{,}04; 6{,}8; 6{,}15; 5{,}16; 4; 2{,}84; 1{,}85),$$
$$\tilde{g}_n^y = (1{,}97; 3{,}04; 4{,}2; 5{,}28; 6{,}1; 6{,}55; 6{,}53; 6{,}1;$$
$$5{,}28; 4{,}2; 3{,}05; 1{,}97; 1{,}15; 0{,}7; 1{,}14).$$

После операции округления получаем значения координат границы объекта:

$$\text{round}\,(\tilde{g}_n^x,\ \tilde{g}_n^y) = ((2,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 5),\ (3,\ 6),\ (4,\ 7),\ (5,\ 7),\ (6,\ 6),\ (7,\ 5),\ (7,\ 4),\ (7,\ 3),\ (6,\ 2),\ (5,\ 1),\ (4,\ 1),\ (3,\ 1),\ (2,\ 1)).$$

5. Вычисляем ошибку восстановления точек границы. Если $\tilde{g}_{x_i,y_i}$ представляет собой оценку g_{x_i,y_i}, то ошибка восстановления точек границы

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{2N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1}\left(\tilde{g}_{x_i,y_i} - g_{x_i,y_i}\right)^2}.$$

При учете более шести дескрипторов величина $\varepsilon = 0$, т. е. искажения отсутствуют. Форма объекта идентична исходному образу. В рассматриваемом примере величина искажений практически равна $\varepsilon \cong 0$. Как видно, сравнительно небольшое пространство сохраняемых признаков ДПХ точно описывает объект. Шесть признаков практически точно определяют кривую неправильной формы. При сохранении четырех признаков среднеквадратичная ошибка восстановления точек границы не превышает величины $\varepsilon = 0{,}2$.

6. Эффективность кодирования (сжатия) оценивается коэффициентом

$$K = \frac{N-M}{N},$$

где N – затраты на передачу (хранение) данных без сжатия;

M – затраты на передачу (хранение) данных со сжатием.

Например, передача (хранение) яркостей всех 64 пикселей фрагмента изображения размером 8×8 реализуется посредством использования

$$N = 2^6 \cdot 2^3 = 2^9 = 512 \text{ бит},$$

где значение яркости каждого пикселя кодируется двоичным кодом длиной 8 бит.

Пусть с использованием метода сжатия по стандарту $MPEG$-4 значение $M = 128$ бит. Тогда эффективность сжатия будет равна

$$K = \frac{512-128}{512} = 0{,}75,$$

что соответствует 75 %.

Преобразуем последнюю формулу следующим образом:

$$KN = N - M,$$
$$N = KN + M,$$
$$\frac{N}{M} = \frac{KN + M}{M}.$$

В этом случае отношение вида $\frac{N}{M}$ характеризует выигрыш в записи данных. Для рассматриваемого примера выигрыш равен

$$\frac{N}{M} = \frac{KN + M}{M} = \frac{0{,}75 \cdot 512 + 128}{128} = 4.$$

В рассмотренном примере 6.1 выигрыш в описании границы равен $\frac{N}{M} \cong$ $\cong 5{,}33$ раза.

6.3. Алгоритм распознавания образов с помощью количественных признаков

Распознавание образов или объектов – это решение задачи отнесения входных сигналов, изображений, данных и пр. к какому-либо из идентифицируемых классов образов. Решение основывается на дифференциации существенных признаков образов от фоновых составляющих и от деталей, не относящихся к обрабатываемому процессу [14].

На вход системы автоматического распознавания образов данные могут поступать от различных источников: датчиков, источников информации, разных физических объектов и процессов, результатов экспериментов и пр. Данные, поступающие на вход системы распознавания, как правило, включают сигналы, которые часто являются пространственными, временными или частотными функциями. Сигналы, данные, объекты интереса на изображениях, которые необходимо распознать, называют образами.

Определение 6.1. Классом образов называется совокупность образов, обладающих общими свойствами.

Классы образов обозначим символами c_1,…, c_i,…, c_m, где индекс m соответствует количеству классов.

Определение 6.2. Под машинным (компьютерным) распознаванием образов понимаются методы, позволяющие относить образы к тем или иным классам автоматически.

Выходная информация системы распознавания образов сводится к указанию одного или нескольких классов. Например, все разновидности написания символа «а» должны отображаться в один и тот же класс $c_{\text{а}}$; все электрокардиограммы у здоровых людей должны отображаться в один и тот же класс «норма» $c_{\text{н}}$ независимо от пола, национальности, возраста обследуемых, свойственных им биологических отклонений, расположения электродов при снятии электрокардиограммы.

Для представления, описания образов используется совокупность или некоторое множество наиболее характерных признаков (дескрипторов) распознаваемых объектов. В практических задачах распознавания образов получили распространение три формы представления признаков:

– в виде векторов признаков;

– в виде символьных строк;

– в виде деревьев.

Образ, представленный вектором признаков размером $n \times 1$, записывается как

$$\mathbf{X}_{ij} = (x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)^T,$$

где $\mathbf{X}_{ij}$ означает j-й образ, принадлежащий классу c_i. Компонента x_k вектора $\mathbf{X}_{ij}$ представляет его k-й дескриптор (признак) образа, принадлежащего классу c_i. Когда величины $x_1, \dots, x_k, \dots x_n$ являются вещественными числами, вектор $\mathbf{X}_{ij}$ представляет собой точку в n-мерном евклидовом пространстве. По различным причинам образы, принадлежащие одному классу, могут отличаться. Векторы признаков, описывающие эти образы, варьируют в пределах одного и того же класса. Наблюдаемые (входные) образы $\mathbf{X}$ системы распознавания представляют собой случайные векторы. Компоненты x_k вектора $\mathbf{X}$ являются случайными величинами. Возможна ситуация, когда векторы признаков, описывающие разные объекты, могут пересекаться.

Пусть на изображении имеются два объекта интереса для распознавания. Каждый образ описывается результатом двух измерений.

Класс c_1 образов описывается множеством векторов признаков

$$\left\{\mathbf{X}_{11} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_{12} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{X}_{1l} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Класс c_2 образов описывается множеством векторов признаков

$$\left\{\mathbf{X}_{21} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \mathbf{X}_{22} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{X}_{2l} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\}.$$

Здесь l образов каждого класса представляются точками в двумерном евклидовом пространстве.

Векторы признаков, принадлежащие определенному классу, образуют распределение векторов $\mathbf{X}$ в n-мерном пространстве. Если априори известны m распределений (классов) векторов $\mathbf{X}$, то между ними можно установить границы или (гиперплоскости), которые делят n-мерное пространство на подпространства, соответствующие классам c_1,…, c_i,…, c_m.

Определение 6.3. Функция $g(\mathbf{X})$, описывающая разделение подпространств, называется дискриминантной функцией.

По различным причинам образы, принадлежащие одному классу, могут отличаться, поэтому векторы признаков, описывающие эти образы, варьируют в пределах одного и того же класса. Возможна ситуация, когда векторы признаков, описывающие разные объекты, могут пересекаться. На рис. 6.2 показаны признаки классов c_1 и c_2 в виде точек двумерного пространства.

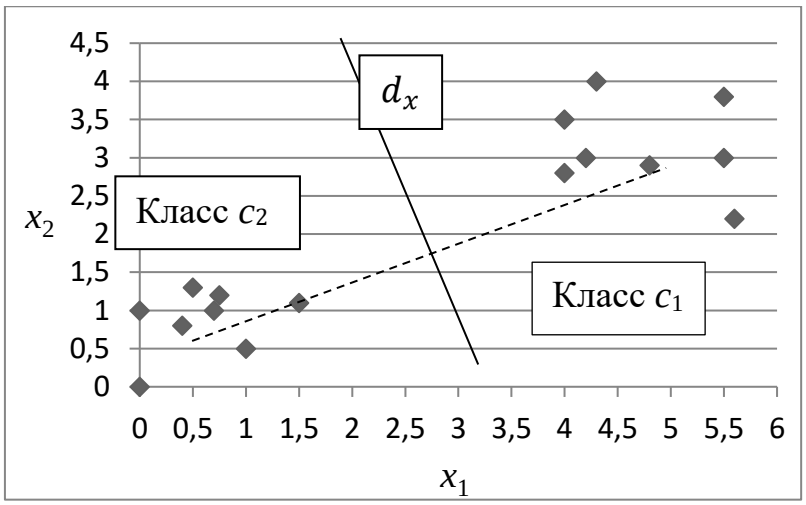


Рис. 6.2. Двумерные признаки классов

Классификация образов или отнесение образа к тому или иному классу c_i реализуется посредством разбиения множества векторов признаков на подмножества – кластеры. На рис. 6.2 множество точек, представляющих результаты измерений, разбиты на два кластера, состоящих из близко расположенных точек. В данном примере кластеры можно найти как подмножества плотно расположенных точек внутри описывающих окружностей. Выбор дескрипторов, на которых базируются компоненты векторов признаков, оказывает влияние на конечные характеристики системы распознавания, использующей эти векторы признаков.

Очевидно, что для эффективной классификации образов, принадлежащих к определенному классу, необходимо иметь непересекающиеся кластеры. Это обстоятельство подчеркивает важность правильного выбора дескрипторов, процедур предварительной обработки и выделения признаков.

Определение 6.4. Признаки, являющиеся общими для всех образов, принадлежащих к определенному классу, называются внутриклассовыми признаками.

Определение 6.5. Признаки, которые характеризуют различия между классами, называются межклассовыми признаками.

Проблема классификации образов заключается в определении оптимальных разделяющих границ или в разработке решающих процедур для отнесения данных к различным классам образов. На рис. 6.2 иллюстрируется простая линейная решающая функция, или граница, разделяющая двумерные векторы признаков на два класса. Оптимальная линейная решающая функция представляет собой перпендикуляр, проведенный через середину прямой линии, соединяющей кластеры двух классов. Описанный метод построения векторов признаков приводит к классам образов, характеризующихся количественной информацией.

В ряде приложений распознавания характеристики образов описываются структурными связями. Например, распознавание отпечатков пальцев (рис. 6.3) основывается на взаимосвязях признаков отпечатка, называемых мелкими дета-

лями. Эти признаки играют роль примитивов, которые вместе с их относительными размерами и расположением описывают свойства линий отпечатка, такие как конец бороздки, раздвоение бороздки (ветвление), слияния, несвязные сегменты, дуги, завитки, петля правая, петля левая и др. В таких задачах распознавания принадлежность к классу образов определяется не только данными количественных измерений признаков, но и пространственными отношениями между признаками, текстурными особенностями объектов и пр.

Рис. 6.3. Изображение отпечатка пальца

Существуют два подхода решения задачи распознавания образов.

6.3.1. Распознавание с учителем

Распознавание с учителем предполагает наличие образов $\mathbf{X}_{ij}$ с заранее известной классификацией. Каждому образу ставится в соответствие метка, указывающая класс c_i, к которому он принадлежит. Необходимо обучить классификатор автоматически классифицировать образ $\mathbf{X}_{ij}$, принадлежащий одному из классов $c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_m$.

Определение 6.6. Заданное множество примеров векторов признаков с известной классификацией называется обучающим множеством (обучающей выборкой).

При наличии обучающей выборки существует возможность разработки решающих, например, дискриминантных функций, которые могут характеризовать разделение между классами. Эти функции далее могут быть использованы для классификации новых образов, для которых принадлежность к какому-либо классу априори не известна.

Определение 6.7. Множество векторов признаков с известной классификацией, используемое для оценки разработанного классификатора, называется контрольной выборкой.

6.3.2. Распознавание без учителя

Второй подход к распознаванию образов возникает, если примеры образов, подлежащие анализу, не снабжены метками, указывающими их принадлежность к классу. Например, астрономические данные, когда следует обнаружить наличие излучающих звездных или иных объектов. Случай обучения без учителя возникает и при решении задач распознавания на основе данных произвольного характера. Такая ситуация связана с тем, что неизвестно, отличаются ли некоторые классы друг от друга. Для решения таких задач можно воспользоваться методами кластерного анализа.

6.3.3. Алгоритм классификация образов с использованием методов теории решений

Пусть имеется m классов $c_1, c_2,\ldots, c_i,\ldots, c_m$ образов. Образы $\mathbf{X}_{ij}$, принадлежащие различным классам, представляют собой точки в n-мерном евклидовом пространстве. Все классы образов можно представлять в виде множества подпространств, на которое разбивается n-мерное пространство. Классификация образов заключается в отнесении вектора $\mathbf{X}$ к соответствующему подпространству. Для этого следует найти описание границ или гиперплоскостей, разделяющих эти подпространства, в виде некоторых функций. В качестве таких функций используют функции, линейно зависящие от значений координат векторов признаков. Например, в случае двумерного пространства признаков (см. рис. 6.2) в качестве разделяющей функции выступает прямая линия. Для трехмерного пространства разделяющая поверхность между тремя классами является плоскостью, а при $n > 3$ разделяющая поверхность называется гиперплоскостью.

Использование прототипа. Иллюстрацией метода теории решений может служить классификатор, основанный на оценке минимума расстояния в пространстве признаков между входом (точкой образа $\mathbf{X}$) и всеми прототипами (эталонами) всех m классов. Наиболее вероятно вектор $\mathbf{X}$ относится к тому классу c_i, прототип которого наиболее близок по расстоянию в заданной метрике.

Представим переменные m классов в виде скопления точек в разных областях n-мерного пространства. Тогда в качестве прототипа (эталона) каждого класса может выступать точка, координатами которой являются средние значения переменных в данном классе. Каждому классу $c_1, c_2,\ldots, c_i,\ldots, c_m$ соответствует средний образ (прототип) множества $\{\bar{\mathbf{X}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{X}}_m\}$. На рис. 6.4 показаны точки-прототипы $\bar{\mathbf{X}}_1$ и $\bar{\mathbf{X}}_2$ соответственно классов c_1 и c_2. Другие точки пространства описываются множествами обучающих векторов.

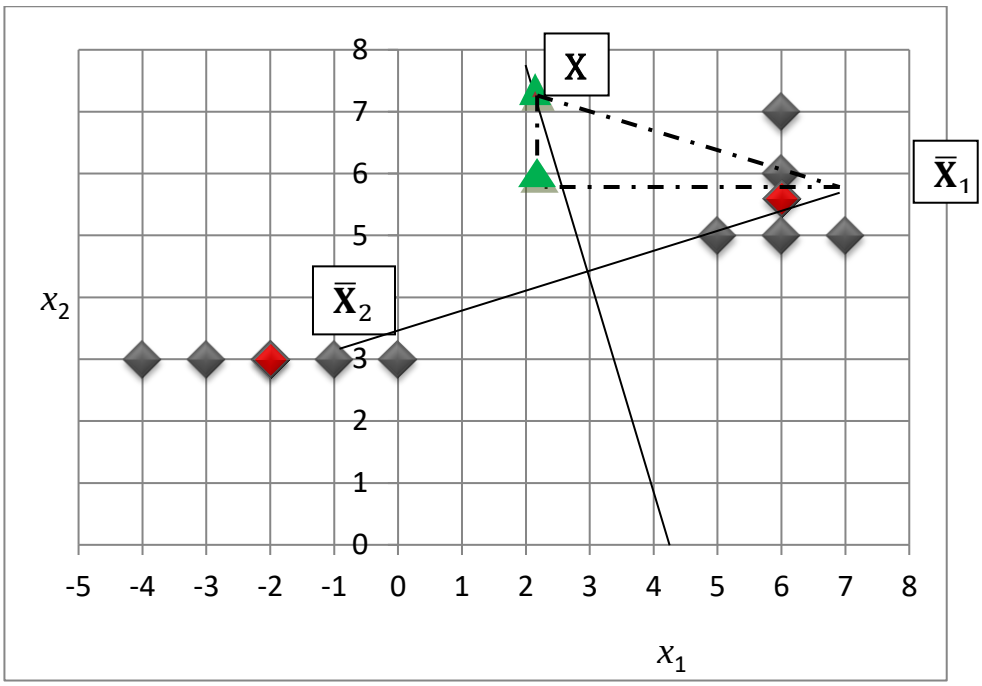


Рис. 6.4. Двумерные точки-прототипы

При использовании евклидовой метрики расстояние между вектором признаков $\mathbf{X}$ распознаваемого образа и вектором примитива $\bar{\mathbf{X}}_i$, определяется формулой

$$d_i(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X} - \mathbf{X}_i\|,\ i = 1, 2, \ldots,\ m. \qquad (6.9)$$

Решающим правилом для классификации образа $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ может быть правило выбора того класса, для которого вектор $\mathbf{X}$ соответствует наименьшему расстоянию $d_i(\mathbf{X})$, т. е.

$$\text{если } d_i(\mathbf{X}) < d_j(\mathbf{X}), \forall j \neq i, \text{ тогда } \mathbf{X} \in c_i.$$

Напомним некоторые понятия линейной алгебры. Пусть векторы $\bar{\mathbf{X}}_1, \ldots, \bar{\mathbf{X}}_i, \ldots, \bar{\mathbf{X}}_m$ длиной n обозначают точки в n-мерном евклидовом пространстве, т. е. являются радиусами-векторами. Радиус-вектор, соответствующий точке n-мерного пространства, имеет длину (или норму)

$$\|\bar{\mathbf{X}}\| = (\bar{x}_1^2 + \cdots + \bar{x}_n^2)^{\frac{1}{2}}. \qquad (6.10)$$

Выражение (6.10) называют расстоянием Евклида (нормой Евклида). Пусть образ $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_n)$ – это произвольный вектор n-мерного пространства. Если $\mathbf{X}$ и $\bar{\mathbf{X}}_\text{i}$ радиусы-векторы, которые определяют место расположения двух точек $(x_1, \ldots, x_n)$ и $(\bar{x}_{i1}, \ldots \bar{x}_{in})$ в n-мерном пространстве, то расстояние $d_i(\mathbf{X})$ между вектором $\mathbf{X}$ и $\bar{\boldsymbol{X}}_{\boldsymbol{i}}$ определяется длиной вектора переноса $(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_i)$. Вектор $(\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_i)$

обозначает перемещение между двумя точками в пространстве. В общем случае, если $\mathbf{X}$ и $\overline{\mathbf{X}}_i$ радиусы-векторы, которые определяют место расположения двух точек $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$ в n-мерном пространстве, длина вектора переноса определяет расстояния между двумя точками в n-мерном пространстве:

$$d_i(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_i\| = \sqrt{(x_1 - \bar{x}_1)^2 + (x_2 - \bar{x}_2)^2 + \cdots + (x_n - \bar{x}_n)^2}. \quad (6.11)$$

Рассмотрим в качестве примера получение решающей функции для случая, когда образы представляются точками на двумерной плоскости (см. рис. 6.4). Граница, разделяющая классы c_1 и c_2, представляет собой перпендикуляр, проведенный через середину прямой линии, соединяющую кластеры двух классов в точках-прототипах $\overline{\mathbf{X}}_1$ и $\overline{\mathbf{X}}_2$. Очевидно, любая точка $\mathbf{X}$ на линии разделения кластеров находится на одинаковом расстоянии от $\overline{\mathbf{X}}_1$ и $\overline{\mathbf{X}}_2$. Тогда справедливы следующие равенства относительно векторов переноса:

$$\begin{gathered} d_1(\mathbf{X}) = d_2(\mathbf{X}), \\ d_1(\mathbf{X}) - d_2(\mathbf{X}) = 0, \end{gathered} \quad (6.12)$$

где $d_1(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X} - \overline{\boldsymbol{X}}_1\|$, $d_2(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_2\|$.

Далее запишем (6.12) в форме

$$d_1(\mathbf{X}) - d_2(\mathbf{X}) = d(\mathbf{X}), \quad (6.13)$$

где $d(\mathbf{X})$ – некоторая величина расстояния.

Тогда решение о классификации неизвестных образов записывается в виде следующих условий:

$$\begin{gathered} \text{если } d(\mathbf{X}) > 0, \text{ то } \mathbf{X} \in c_2, \\ \text{если } d(\mathbf{X}) < 0, \text{ то } \mathbf{X} \in c_1. \end{gathered}$$

С помощью выражения (6.11), запишем выражение разности расстояний (6.13), используя квадраты расстояний:

$$\|\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_1\|^2 - \|\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_2\|^2 = d'(\mathbf{X}). \quad (6.14)$$

Далее используем известное соотношение между скалярным произведением векторов и квадратом нормы (квадратом длины) вектора вида на двумерном евклидовом пространстве:

$$\mathbf{X}^T\mathbf{X} = (x_1 x_2)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1^2 + x_2^2) = \|\boldsymbol{X}\|^2.$$

В общем случае

$$\|\mathbf{X}\|^2 = (x_1^2 + x_2^2 \ldots + x_n^2) = \mathbf{X}^T\mathbf{X},$$

где $\mathbf{X}^T$ – это вектор-строка.

Используя такую форму записи квадрата длины вектора, запишем отдельные составляющие выражения (6.14):

$$\|\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_1\|^2 = (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_1)^T(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_1) = \|\mathbf{X}\|^2 - (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{X}}_1) - (\overline{\mathbf{X}}_1^T\mathbf{X}) + \|\overline{\mathbf{X}}_1\|^2, \quad (6.15)$$

$$\|\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_2\|^2 = (\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_2)^T(\mathbf{X} - \overline{\mathbf{X}}_2) = \|\mathbf{X}\|^2 - (\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\overline{\mathbf{X}}_2) - (\overline{\mathbf{X}}_2^T\mathbf{X}) + \|\overline{\mathbf{X}}_2\|^2. \quad (6.16)$$

Подставляя в (6.14) составляющие (6.15) и (6.16), получаем

$$\|\mathbf{X}\|^2 - (\mathbf{X}^T\overline{\mathbf{X}}_1) - (\overline{\mathbf{X}}_1^T\mathbf{X}) + \|\overline{\mathbf{X}}_1\|^2 -$$
$$-\|\mathbf{X}\|^2 + (\mathbf{X}^T\overline{\mathbf{X}}_2) + (\overline{\mathbf{X}}_2^T\mathbf{X}) - \|\overline{\boldsymbol{X}}_2\|^2 = d'(\mathbf{X}).$$

Выполним очевидные преобразования последнего выражения:

$$\|\overline{\mathbf{X}}_1\|^2 - \|\overline{\mathbf{X}}_2\|^2 - (\overline{\mathbf{X}}_1^T - \overline{\mathbf{X}}_2^T)\mathbf{X} - \mathbf{X}^T(\overline{\mathbf{X}}_1 - \overline{\mathbf{X}}_2) = d'(\mathbf{X}).$$

С учетом того что для матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ $(\mathbf{AB})^T = \mathbf{B}^T\mathbf{A}^T$, получаем

$$\|\overline{\mathbf{X}}_1\|^2 - \|\overline{\mathbf{X}}_2\|^2 - (\overline{\mathbf{X}}_1^T - \overline{\mathbf{X}}_2^T)\mathbf{X} - (\overline{\mathbf{X}}_1^T - \overline{\mathbf{X}}_2^T)\mathbf{X} = d'(\mathbf{X}),$$
$$\|\overline{\mathbf{X}}_1\|^2 - \|\overline{\mathbf{X}}_2\|^2 - 2(\overline{\mathbf{X}}_1^T - \overline{\mathbf{X}}_2^T)\mathbf{X} = d'(\mathbf{X}),$$
$$\|\overline{\mathbf{X}}_1\|^2 - \|\overline{\mathbf{X}}_2\|^2 = 2(\overline{\mathbf{X}}_1 - \overline{\mathbf{X}}_2)^T\mathbf{X}.$$

Таким образом, разность квадратов расстояний (6.14) определяется как

$$\|\overline{\boldsymbol{X}}_1\|^2 - \|\overline{\boldsymbol{X}}_2\|^2 - 2(\overline{\mathbf{X}}_1 - \overline{\mathbf{X}}_2)^T\mathbf{X} = d'(\mathbf{X}). \quad (6.17)$$

Пример 6.2. Пусть обучающие множества (прототипы) состоят из двумерных векторов признаков образов $\mathbf{X}_{ij}$. К классу c_1 относятся векторы признаков

$$\left\{\mathbf{X}_{11} = \begin{pmatrix}5\\5\end{pmatrix}, \mathbf{X}_{12} = \begin{pmatrix}6\\5\end{pmatrix}, \mathbf{X}_{13} = \begin{pmatrix}6\\6\end{pmatrix}, \mathbf{X}_{14} = \begin{pmatrix}6\\7\end{pmatrix}, \mathbf{X}_{15} = \begin{pmatrix}7\\5\end{pmatrix}\right\}.$$

К классу c_2 относятся векторы признаков

$$\left\{\mathbf{X}_{21} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}, \mathbf{X}_{22} = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}, \mathbf{X}_{23} = \begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}, \mathbf{X}_{24} = \begin{pmatrix}-3\\3\end{pmatrix}, \mathbf{X}_{25} = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}\right\}.$$

Вычислить решающую (дискриминатную) функцию классификатора образов.

Решение. Шаги алгоритма вычисления дискриминатной функции:

1. Вычисление средних значений (векторов прототипов) обучающих множеств классов c_1 и c_2:

$$\bar{\mathbf{X}}_i = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} \mathbf{X}_{ij},\ i = 1,2.$$

Векторы прототипов, соответственно, равны

$$\bar{\mathbf{X}}_1 = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} \mathbf{X}_{1j} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5{,}6 \end{pmatrix},$$
$$\bar{\mathbf{X}}_2 = \frac{1}{5}\sum_{j=1}^{5} \mathbf{X}_{2j} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

2. Описание решающей границы (см. рис. 6.4), разделяющей классы c_1 и c_2. Граница представляет собой перпендикуляр, проведенный через середину прямой линии, соединяющей кластеры двух классов в точках $\bar{\mathbf{X}}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 5{,}6 \end{pmatrix}$ и $\bar{\mathbf{X}}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Любая точка $\mathbf{X}$ принадлежит решающей границе. Например, точка $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}2 \\ 7 \end{pmatrix}$. Радиус-вектор, соответствующий этой точке двумерного пространства, имеет длину (или норму)

$$\|\mathbf{X}\| = \sqrt{(x_1^2 + x_2^2)} = (1{,}2^2 + 7^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Если $\mathbf{X}$ и $\bar{\mathbf{X}}_1$ – радиусы-векторы, которые определяют место расположения двух точек с координатами (x_1, x_2) и $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ в двумерном пространстве, то вектор переноса от $\bar{\mathbf{X}}_1$ к $\mathbf{X}$ задается разностью двумерных векторов:

$$d_i(\mathbf{X}) = \|\mathbf{X} - \bar{\mathbf{X}}_i\| = \ ((x_1 - \bar{x}_{i1})^2 + (x_2 - \bar{x}_{i2})^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Подставляя в выражение (6.17) значение координат прототипов $\bar{\mathbf{X}}_1$ и $\bar{\mathbf{X}}_2$, а также координаты неизвестного вектора-образа $\mathbf{X}$, получаем следующие уравнения:

$$(\bar{x}_{11}^2 + \bar{x}_{12}^2) - (\bar{x}_{21}^2 + \bar{x}_{22}^2) - 2((\bar{x}_{11} - \bar{x}_{21}) \quad (\bar{x}_{12} - \bar{x}_{22}))\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = d'(\mathbf{X}),$$
$$(\bar{x}_{11}^2 + \bar{x}_{12}^2) - (\bar{x}_{21}^2 + \bar{x}_{22}^2) - 2\ ((\bar{x}_{11} - \bar{x}_{21})x_1 + (\bar{x}_{12} - \bar{x}_{22})x_2) = d'(\mathbf{X}),$$
$$(6^2 + 5{,}6^2) - ((-2)^2 + 3^3) - 2\left(\big(6 - (-2)\big)x_1 + (5{,}6 - 3)x_2\right) = d'(\mathbf{X}),$$
$$54{,}36 - 2(8x_1 + 2{,}6x_2) = d'(\mathbf{X}). \qquad (6.18)$$

3. Оценка правила принятия решения о классификации входного образа с использованием контрольной выборки.

Пусть в качестве контрольной выборки выступает вектор $\tilde{\mathbf{X}}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} \in c_1$. Вычислим значение $d'(\mathbf{X})$ по уравнению (6.18):

$$54{,}36 - 2(8 \cdot 3 + 2{,}6 \cdot 8) = d'(\mathbf{X}),$$

$$54{,}36 - 89{,}6 = d'(\mathbf{X}).$$

В результате формируется правило автоматического принятия решения о наблюдаемом образе:

$$\text{если } d'(\mathbf{X}) < 0, \text{ то образ } \mathbf{X} \in c_1,$$
$$\text{если } d'(\mathbf{X}) > 0, \text{ то образ } \mathbf{X} \in c_2.$$

Определение 6.8. Обобщенная линейная решающая или дискриминантная функция записывается как

$$g(\mathbf{X}) = w_1 x_1 + \cdots + w_n x_n - w_{n+1} = \mathbf{W}^T \mathbf{X}, \tag{6.19}$$

где $\mathbf{X} = (x_1, \ldots, x_k, \ldots, x_n, 1)^T$ – входной образ с добавленной координатой, равной единице;

$\mathbf{W} = (w_1, \ldots, w_k, \ldots, w_n, w_{n+1})^T$ – вектор параметров (весов) классификатора.

Параметры вектора $\mathbf{W}$ получаются из обучающего множества. Получив дискриминантную функцию, говорят, что классификатор обучен, т. е. способен классифицировать образы. Функцию $g(\mathbf{X})$ интерпретируют как границу или гиперплоскость, разделяющую классы. Граница или гиперплоскость определяется как

$$g(\mathbf{X}) = 0. \tag{6.20}$$

Из уравнения (6.18) находим дискриминантную функцию:

$$54{,}36 - 2(8x_1 + 2{,}6x_2) = d'(\mathbf{X}),$$
$$g(\mathbf{X}) = 8x_1 + 2{,}6x_2 - 27{,}18. \tag{6.21}$$

Пример 6.3. Синтезировать схему классификатора образов, работающего по критерию минимума расстояния. Исходные данные взять из примера 6.2.

Решение. Автоматическая классификация образа $\mathbf{X}_{ij}$ объекта к одному из классов c_1, c_2 выполняется на основе решающего правила классификатора. Для получения правила принятия решения о классе образа сформируем контрольную выборку из испытательных образов, точная классификация которых известна.

Обозначим эти образы как $\widetilde{\mathbf{X}}_k = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$. Пусть контрольная выборка включает в себя четыре образа, $k = 1, 2, 3, 4$:

$$\widetilde{\mathbf{X}}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \widetilde{\mathbf{X}}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}, \widetilde{\mathbf{X}}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \widetilde{\mathbf{X}}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим значение $g(\mathbf{X})$ для каждого из испытательных образов:

$$\tilde{\mathbf{X}}_1\colon g(\mathbf{X}) = 8\cdot 3+2{,}6\cdot 8-27{,}18>0,$$
$$\tilde{\mathbf{X}}_2\colon g(\mathbf{X}) = 8\cdot(-2)+2{,}6\cdot 7-27{,}18<0,$$
$$\tilde{\mathbf{X}}_3\colon g(\mathbf{X}) = 8\cdot 3+2{,}6\cdot 3-27{,}18>0,$$
$$\tilde{\mathbf{X}}_4\colon g(\mathbf{X}) = 8\cdot 2+2{,}6\cdot 1-27{,}18<0.$$

Из вычислений следует, что когда образ $\tilde{\mathbf{X}}$ лежит справа от решающей границы, то $g(\mathbf{X})>0$. Если образ лежит слева от границы, то $g(\mathbf{X})<0$. Получаем решающее правило классификатора:

$$\text{если } g(\mathbf{X})>0, \text{ то } \mathbf{X}\in c_1,$$
$$\text{если } g(\mathbf{X})<0, \text{ то } \mathbf{X}\in c_2.$$

Замечание 6.1. Если $g(\mathbf{X})=0$, то имеет место случай неопределенности классификации.

Вид дискриминантной функции (6.21) определяет аппаратно-программную схему классификатора. Коэффициенты $(w_1,\dots,w_k,\dots,w_n,w_{n+1})$ дискриминантной функции задают параметры схемы классификатора.

На рис. 6.5 показана схема решающего устройства автоматического классификатора образов.

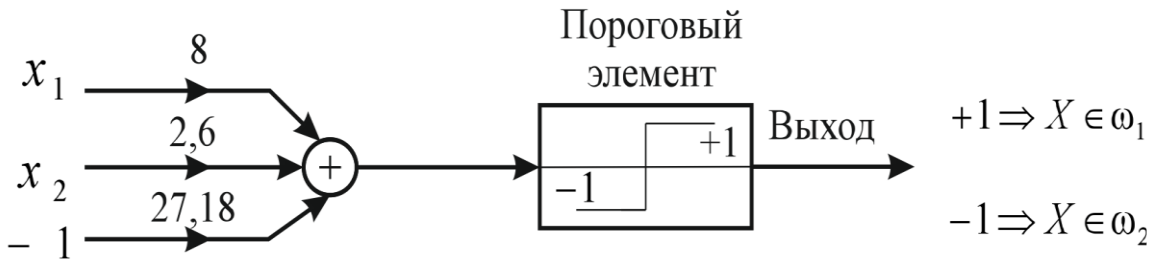


Рис. 6.5. Решающее устройство классификатора

Достоинством метода дискриминантных функций является простая структура классификатора, а также возможность ее реализации преимущественно посредством линейных решающих блоков. Важным достоинством рассмотренного метода является возможность обучения машины правильному распознаванию по обучающей выборке образов. При этом алгоритм автоматического обучения оказывается весьма простым в сравнении с другими методами распознавания. В силу указанных причин метод дискриминантных функций весьма часто используется.

В реальных условиях данные, поступающие на вход системы распознавания, могут иметь пересекающиеся кластеры. Переход от одного кластера к другому может быть не резким, а постепенным. Например, аномалии в клетке могут присутствовать в изменяющейся степени, когда нет отчетливых классов «нормальный» и «с патологией». Даже если классы четко определены, например, как

в задаче оптического распознавания символов, пространство признаков буквы «О» и цифры «0» мало различимо. Возникает очевидная проблема правильной классификации таких объектов. Метод классификации классов объектов с похожим описанием должен основываться на разных признаках. В этом случае признаки разных классов объектов должны быть некоррелированными.

6.4. Задания для самостоятельного выполнения и вопросы по разделу

1. Вычислить значения дискретных отсчетов функции Хартли с периодом $N = 8$ для произведений $nv = 3, nv = 4, nv = 20$.

2. Записать дискретный ортогональный базис Хартли в виде матрицы **H** размерностью 4×4.

3. При каких условиях возможно выполнение сжатия изображений?

4. В чем состоит смысл применения унитарных дискретных преобразований при осуществлении эффективного кодирования двумерных сигналов?

5. Чем отличаются спектры изображений на основе ДПХ и ДПФ?

6. Позволяет ли использование в качестве ядра ДПХ и ДПФ реализацию быстрых алгоритмов сжатия данных?

7. Пояснить сущность пороговой фильтрации коэффициентов преобразования.

8. В чем заключаются преимущества и недостатки использования пороговой фильтрации коэффициентов преобразовании в сравнении с зональной фильтрацией?

9. Создать кластеры на основе известных внутренних признаков образов.

10. Создать произвольную обучающую выборку образов.

11. Получить дискриминантную функцию классификатора образов с использованием прототипов.

12. Произвести оценку разработанного классификатора с помощью контрольной выборки образов.

13. Синтезировать структурную схему классификатора.

Список использованных источников

1. Stearns, S. D. Digitale Verarbeitung Analoger Signale / Digital Signal Analysis / S. D. Stearns. – Walter de Gruyter GmbH & Co KG, 2018.

2. Митюхин, А. И. Прикладная теория информации : учеб.-метод. пособие / А. И. Митюхин. – Минск : БГУИР, 2018.

3. Митюхин, А. И. Цифровая обработка речи и анализ изображений : учеб.-метод. пособие / А. И. Митюхин. – Минск : БГУИР, 2016.

4. Оппенгейм А. Цифровая обработка сигналов / А. Оппенгейм, Р. Шафер. – М. : Техносфера, 2010.

5. Яне, Б. Цифровая обработка изображений / Б. Яне. – М. : Техносфера, 2007.

6. Шапиро, Л. Компьютерное зрение / Л. Шапиро, Дж. Стокман. – М. : Бином, 2006.

7. Гонсалес, Р. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс. – М. : Техносфера, 2005.

8. Айфичер, Э. С. Цифровая обработка сигналов: практический подход / Э. С. Айфичер, Б. У. Джервис ; пер. с англ. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2008.

9. Jähne, M. Digital Image Processing / M. Jähne. – Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2005.

10. Смит, С. Цифровая обработка сигналов. Практическое руководство для инженеров и научных работников / С. Смит ; пер. с англ. – М. : Додека-XXI, 2008.

11. Сэломон, Д. Сжатие данных, изображений и звука : учеб. пособие для вузов / Д. Сэломон ; пер. с англ. – М. : Техносфера, 2006.

12. Mitsiukhin, A. Extraction of the otion indications in the sequence of images. Proceedings 58. International Scientific Colloquium, DE, Ilmenau, 08–12 September 2014, Technische Universität Ilmenau. – TU Ilmenau, 2014. – URN (Paper): urn:nbn:de:gbv:ilm1-2014iwk-0,75:0, id 2066.

13. Форсайт, Д. Компьютерное зрение. Современный подход / Д. Форсайт, Ж. Понс. – М. : Изд. дом «Вильямс», 2004.

14. Ipatov, V. Spread Spektrum and CDMA. Principles and Application / V. Ipatov. – John Wiley & Sons, Ltd, 2005.

Св. план 2022, поз. 51

Учебное издание

Митюхин Анатолий Иванович

АЛГОРИТМЫ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ПОСОБИЕ

Редактор *Е. С. Юрец*
Корректор *Е. Н. Батурчик*
Компьютерная правка, оригинал-макет *В. М. Задоля*

Подписано в печать 12.04.2023. Формат 60×84 1/16. Бумага офсетная. Гарнитура «Таймс».
Отпечатано на ризографе. Усл. печ. л. 8,25. Уч.-изд. л. 8,6. Тираж 50 экз. Заказ 68.

Издатель и полиграфическое исполнение: учреждение образования
«Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий №1/238 от 24.03.2014,
№2/113 от 07.04.2014, №3/615 от 07.04.2014.
Ул. П. Бровки, 6, 220013, г. Минск